Вложения многогранников *(10 баллов)*

Е.А. Макеева, Т.И. Бидыло

1. *Запишите теорему Эйлера для многогранника, составленного из правильных* ***n****-угольников, так, что в каждой вершине сходится по* ***m*** *ребер. Найдите* *<u>все</u>* *возможные многогранники, удовлетворяющие этому условию, и докажите, что иные варианты невозможны. Как называются такие многогранники все вместе и каждый по отдельности?****(2 балла)***

Общее число граней в таком многограннике составляет F_n, общее число ребер можно записать как $E=\frac{nF_n}{2}$ (каждое ребро принадлежит двум граням), тогда число вершин равно $V=\frac{2}{m}E=\frac{nF_n}{m}$ (каждому ребру принадлежит 2 вершины, но каждая вершина принадлежит **m** ребрам).

Тогда теорема Эйлера принимает вид:

$$\frac{nF_n}{m}-\frac{nF_n}{2}+F_n=2 \quad \text{или} \quad 2nF_n-mnF_n+2mF_n=4m \quad \text{или} \quad F_n(2n-mn+2m)=4m$$

Преобразуя теорему Эйлера, получаем граничные условия для **m**:

$$F_n=\frac{4m}{2m+(2-m)n},$$

поскольку число граней всегда положительно, то $2m+(2-m)n>0$,

$$2m>(m-2)n,$$

$$\frac{2m}{m-2}>n$$

При условии $n\geq 3$ в итоге получаем $\frac{2m}{m-2}>3$ или $2m>3m-6$ или $m<6$.

Рассмотрим все <u>возможные</u> пары значений **m** и **n**:

m = 3 $F_n=\frac{12}{6+(2-3)n}=\frac{12}{6-n}$, т.е., $3\leq n\leq 5$

для **n** = 3, $F_3=\frac{12}{3}=4$, $E=\frac{3\cdot 4}{2}=6$, $V=\frac{3\cdot 4}{3}=4$ <u>тетраэдр</u>

для **n** = 4, $F_4=\frac{12}{2}=6$, $E=\frac{4\cdot 6}{2}=12$, $V=\frac{4\cdot 6}{3}=8$ <u>куб</u>

для **n** = 5, $F_5=\frac{12}{1}=12$, $E=\frac{5\cdot 12}{2}=30$, $V=\frac{5\cdot 12}{3}=20$ <u>додекаэдр</u>

m = 4, $F_n=\frac{16}{8+(2-4)n}=\frac{16}{8-2n}=\frac{8}{4-n}$, т.е., $3\leq n<4$

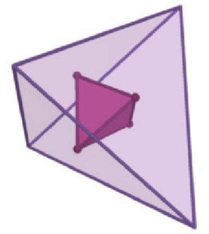
n = 3, $F_3=\frac{8}{4-3}=8$, $E=\frac{3\cdot 8}{2}=12$, $V=\frac{3\cdot 8}{4}=6$ <u>октаэдр</u>

m = 5, $F_n=\frac{20}{10+(2-5)n}=\frac{20}{10-3n}$, т.е., $3\leq n<3{,}33$

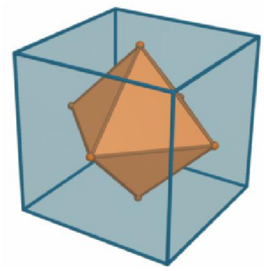
n = 3, $F_3=\frac{20}{10-9}=20$, $E=\frac{3\cdot 20}{2}=30$, $V=\frac{3\cdot 20}{5}=12$ <u>икосаэдр</u>

Все вместе – ***<u>Платоновы тела</u>***.

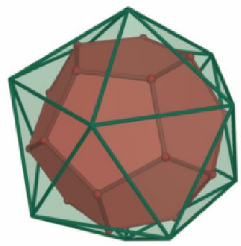
2. *Пара многогранников является двойственными друг другу, если центрам граней одного соответствуют вершины другого. Из многогранников п.* ***1*** *составьте пары двойственных. Свой ответ обоснуйте.****(2 балла)***



Тетраэдр двойственен тетраэдру (**F_t** = **V_t** = 4). (Многогранник, лежащий вершинами в центрах его граней также будет тетраэдром: 4 вершины, 4 треугольных грани, 6 одинаковых ребер, сходящихся под одинаковыми углами, соединяющих центры одинаковых граней «родительского» тетраэдра).



Октаэдр (**F_o** = 8, **V_o** = 6) двойственен кубу (**F_c** = 6, **V_c** = 8). (Соединяя точки на серединах граней куба, получаем фигуру с 6-ю вершинами, 8-ю треугольными гранями, 12-ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых квадратов; аналогично, соединяя точки на серединах граней октаэдра, получаем фигуру с 8-ю вершинами, 6-ю квадратными гранями, 12-ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых треугольников).

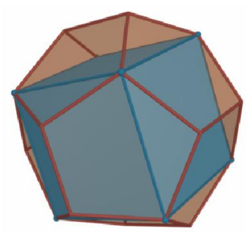


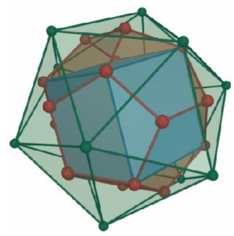
Икосаэдр (**F_i** = 20, **V_i** = 12) двойственен додекаэдру (**F_d** = 12, **V_d** = 20. (Соединяя точки на центрах граней икосаэдра, получаем фигуру с 12-ю вершинами, 20-ю пятиугольными гранями, 30-ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых треугольников; аналогично, соединяя точки на серединах граней додекаэдра, получаем фигуру с 20-ю вершинами, 12-ю треугольными гранями, 30-ю одинаковыми ребрами, соединяющими центры одинаковых пятиугольников).

3. *Рассмотрим «матрешку», в которой все многогранники из п.* ***1*** *расположены друг в друге в порядке уменьшения числа вершин. Докажите, что в такой «матрешке» все многогранники можно попарно вписать друг в друга так, что все вершины внутреннего принадлежат вершинам, ребрам или граням внешнего.* ***(3 балла)***

Матрешка (от внутренней фигуры к внешней): тетраэдр **T** (**V_t** = 4), октаэдр **O** (**V_o** = 6), куб **C** (**V_c** = 8), икосаэдр **I** (**V_i** = 12), додекаэдр **D** (**V_d** = 20).

1) **T** можно разместить так, чтобы его вершины лежали в центре каждой второй грани **O** (что можно представить как **T**, вписанный в **C**, который затем вписан в **O** (как двойственный)). **T**, вписанный в **C**: соединяя каждую вторую вершину куба по диагоналям квадратных граней, получаем фигуру с четырьмя вершинами, четырьмя треугольными гранями напротив остальных четырех вершин куба и шестью одинаковыми ребрами.





2) **O** вписывается в **C** как двойственный.

3) **C** можно разместить так, чтобы его вершины лежали в центре 8-ми из 20-ти граней **I** (что можно представить как **C**, вписанный в **D**, который затем

вписан **I**). **C**, вписанный в **D**: проводим диагонали, соединяя две из пяти вершин пятиугольной грани додекаэдра так, что диагонали трех соседних граней сходятся по три в вершинах додекаэдра, образуя при этом фигуру с восемью вершинами и двенадцатью одинаковыми ребрами и (20 – 8)/2 = 6 квадратными гранями.
4) **I** вписывается в **D** как двойственный.

4. *Рассчитайте, во сколько раз ребро внешнего многогранника при этом будет отличаться от ребра самого внутреннего.* ***(3 балла)***

Примем ребро тетраэдра равным **a**.

1) Поскольку вершины тетраэдра лежат в центрах граней октаэдра, то радиус сферы, описанной вокруг тетраэдра ($R_t = \frac{\sqrt{6}}{4}a_t$), будет равен радиусу сферы, вписанной в октаэдр ($r_o = \frac{\sqrt{6}}{6}a_o$). Из данного равенства найдем соотношение длин ребер: $\frac{\sqrt{6}}{4}a_t = \frac{\sqrt{6}}{6}a_o$ и $a_o = 1{,}5a_t = 1{,}5a$

2) Поскольку вершины октаэдра лежат в центрах граней куба, то радиус сферы, описанной вокруг октаэдра ($R_o = \frac{\sqrt{2}}{2}a_o$), будет равен радиусу сферы, вписанной в куб ($r_c = 0{,}5a_c$).

Из данного равенства найдем соотношение длин ребер: $\frac{\sqrt{2}}{2}a_o = 0{,}5a_c$ или $a_c = \sqrt{2}a_o = \frac{3\sqrt{2}}{2}a_t = \frac{3\sqrt{2}}{2}a = 2{,}12a$.

3) Поскольку вершины куба лежат в центрах граней икосаэдра, то радиус сферы, описанной вокруг куба ($R_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a_c$), будет равен радиусу сферы, вписанной в икосаэдр ($r_i = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a_i$).

Из данного равенства найдем соотношение длин ребер: $\frac{\sqrt{3}}{2}a_c = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a_i$,

$a_i = \frac{6}{3+\sqrt{5}}a_c = \frac{9\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}a_t = \frac{9\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}a = 2{,}43a$.

4) Поскольку вершины икосаэдра лежат в центрах граней додекаэдра, то радиус сферы, описанной вокруг икосаэдра ($R_i = \frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}a_i$), будет равен радиусу сферы, вписанной в додекаэдр ($r_d = \frac{1}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}a_d$).

Из данного равенства найдем соотношение длин ребер: $\frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}a_i = \frac{1}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}a_d$

$$a_d = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}+2{,}2}}a_i = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+2{,}2}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}a_t = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+2{,}2}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}a = 2{,}08a$$

Или можно было воспользоваться справочной формулой связи длины ребра додекаэдра и вписанного в него икосаэдра:

$$a_d = \frac{10}{5+3\sqrt{5}} a_i = \frac{10}{5+3\sqrt{5}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} a_t = \frac{10}{5+3\sqrt{5}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} a = \frac{45\sqrt{2}}{15+7\sqrt{5}} a = 2{,}08a$$

Таким образом, ребро додекаэдра (внешнего многогранника «матрешки») в 2,08 раза больше ребра тетраэдра (внутреннего многогранника «матрешки»).