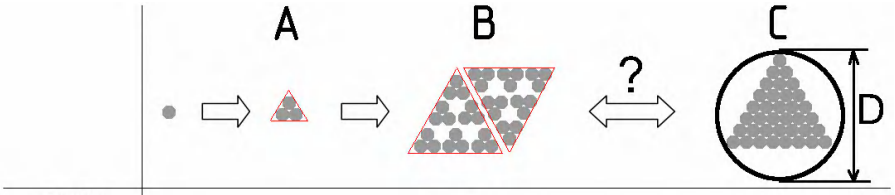
Магия треугольников (*14 баллов*)

Е.А. Макеева, Т.И. Бидыло



атомов на ребре	1	m	m(m+1)	n
пример	1	2	2(2+1) = 6	8
атомов в кластере	1	T_m		T_n
двоичное представление	$T_m=[\{1\}_x\{0\}_{x-1}]_2$		$T_n \xrightarrow{?} [\{1\}_y\{0\}_{y-1}]_2$	y(x)=?

Если r = 0.18 нм и 10 < D < 100 нм, то чему равно T_n?

1. *Запишите общую формулу для числа атомов (**T_m**) в нанокластере **A** с длиной ребра в **m** атомов. (**1.5 балла**)*

Число атомов в кластере **A** – это так называемое «треугольное число»: $T_m = 1+2+3+...+m = \sum_1^m k = \frac{m(m+1)}{2}$.

2. *Докажите, что для любого **m** (рис. 1) из атомов нанокластера **B** можно без остатка построить треугольник **C**. (**3.5 балла**)*

Запишем общее число атомов в **B** (по условию, это удвоенное произведение двух последовательных треугольных чисел):

$$2T_mT_{m+1} = 2\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{m(m+1)^2(m+2)}{2} = \frac{(m^2+2m)(m^2+2m+1)}{2}$$

Преобразуя полученное выражение, можно заметить, что оно также является треугольным числом с аргументом $n = m^2+2m$:

$$2T_mT_{m+1} = \frac{(m^2+2m)((m^2+2m)+1)}{2} = T_{m^2+2m} = T_n.$$

То есть, из атомов нанокластера **B**, отвечающего произвольному **m**, всегда можно без остатка построить треугольник **C** с ребром $n = m^2+2m$.

3. *Докажите, что если число атомов в треугольнике **A** (**T_m**) можно записать в двоичном виде как последовательность, состоящую из **x** единиц и затем (**x**-1) нулей подряд ($[\{1\}_x\{0\}_{x-1}]_2$), то и записанное в двоичном виде число атомов в соответствующем треугольнике **C** (**T_n**) тоже будет иметь вид $[\{1\}_y\{0\}_{y-1}]_2$. (**5 баллов**) Чему при этом будет равно **y**? (**0.5 балла**)*

Переведем число атомов в **A** из двоичной записи в десятичную. Для этого представим двоичную запись в виде суммы степеней числа 2:

$\left[\{1\}_x\{0\}_{x-1}\right]_2=\left[1\cdot\sum_{k=x}^{2x-1}2^{k-1}+0\cdot\sum_{k=1}^{x-1}2^{k-1}\right]_{10}=\left[\sum_{k=x}^{2x-1}2^{k-1}\right]_{10}$ (всего в двоичной записи имеем **2x–1** разряда, из них разряды от **1**-го до (**x–1**)-го занимают нули, а с **x**-го до (**2x–1**)-го – единицы).

Упростим полученное выражение, используя формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=x}^{2x-1}2^{k-1}=\sum_{k=1}^{2x-1}2^{k-1}-\sum_{k=1}^{x-1}2^{k-1}=1\cdot\frac{2^{2x-1}-1}{2-1}-1\cdot\frac{2^{x-1}-1}{2-1}=2^{2x-1}-2^{x-1}=2^{x-1}\left(2^x-1\right)$$

Поскольку число атомов в треугольнике **A** является одновременно и треугольным числом, то $T_m=\frac{m(m+1)}{2}=2^{x-1}\left(2^x-1\right)$. Тогда $m=2^x-1$.

Ранее мы нашли, что на ребре нанокластера **C**, отвечающего данному нанокластеру **A**, содержится $n=m^2+2m$ атомов, следовательно:

$$n=m^2+2m=\left(2^x-1\right)^2+2\left(2^x-1\right)=2^{2x}-2\cdot2^x+1+2\cdot2^x-2=2^{2x}-1$$

и

$$T_n=\frac{\left(2^{2x}-1\right)\left(2^{2x}-1+1\right)}{2}=2^{2x-1}\left(2^{2x}-1\right)$$

Поскольку $\left[\{1\}_x\{0\}_{x-1}\right]_2=2^{x-1}\left(2^x-1\right)$, то $2^{2x-1}\left(2^{2x}-1\right)=\left[\{1\}_{2x}\{0\}_{2x-1}\right]_2$.

То есть, общее число атомов в нанокластере **C** можно записать в виде $\left[\{1\}_{2x}\{0\}_{2x-1}\right]_2$, значит, **y** = 2**x**.

4. *Найдите все возможные* T_n*, если известно, что размер неодимового нанокластера* ***C*** *(как диаметр описанной окружности* ***D****) лежит в диапазоне 10 - 100 нм. Радиус атома неодима* ***r*** *= 0.18 нм. (**3.5 балла**)*

<u>Пересчитаем граничные условия</u>: Диаметр описанной вокруг правильного треугольника окружности равен $D=\frac{4rn}{\sqrt{3}}$, то есть, $n=\frac{\sqrt{3}D}{4r}$.

(*При выводе диаметра описанной окружности мы пренебрегли малыми поправками, появляющимися при строгом рассмотрении радиуса описанной окружности как суммы радиуса окружности, проведенной через центры атомов, лежащих в вершинах треугольника, и радиуса атома, поскольку 0,18 нм << 10 нм*).

Если 10 нм < **D**, то **n** > 24 и $\mathbf{T_n}$ > 300

Если **D** < 100 нм, то **n** < 240 и $\mathbf{T_n}$ < 28920

То есть, 24 < **n** < 240 и 300 < $\mathbf{T_n}$ < 28290.

Возможны два подхода к поиску всех возможных неодимовых кластеров с числом атомов $T_n=\left[\{1\}_y\{0\}_{y-1}\right]_2$, удовлетворяющих условию 300 < $\mathbf{T_n}$ < 28290:

<u>Вариант 1</u>.

Для перебора можно воспользоваться утверждением п.3 условия вкупе с найденным ранее соотношением **y** = 2**x**:

x = 2: 110_2 => 1111000_2 (= 120, 120 < 300)

x = 3: 11100_2 => 11111100000_2 (= **2016**, 300 < 2016 < 28920)

x = 4: 1111000_2 => 111111110000000_2 (= 32640, 32640 > 28920)

<u>Вариант 2</u>.

x = 1 $T_n(x) = 2^{2-1}(2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$

x = 2 $T_n(x) = 2^{2\cdot 2-1}(2^{2\cdot 2} - 1) = 2^3 \cdot 15 = 120$

x = 3 $T_n(x) = 2^{2\cdot 3-1}(2^{2\cdot 3} - 1) = 2^5 \cdot 63 = 2016$

x = 4 $T_n(x) = 2^{2\cdot 4-1}(2^{2\cdot 4} - 1) = 2^7(2^8 - 1) = 32640$

По условию, 300 < $\mathbf{T_n}$ < 28920.

Следовательно, $\mathbf{T_n}$ = <u>2016.</u>