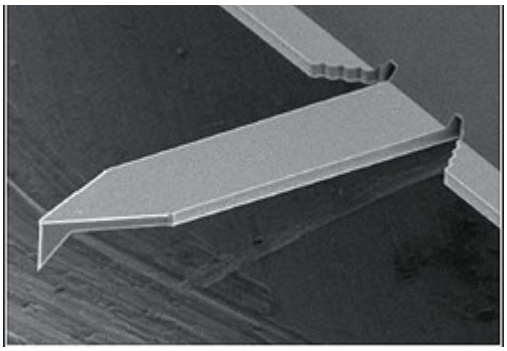
Потенциал взаимодействия.



В атомно-силовой микроскопии (АСМ) используются зондовые датчики, которые представляют собой упругую консоль с острым зондом на конце. Можно считать, что энергия взаимодействия зонда с поверхностью описывается функцией: $U(r)=U_0\left(-\left(\frac{a}{r}\right)^6+\left(\frac{\sqrt{2}a}{r}\right)^{12}\right)$, где r — расстояние до поверхности.

Представьте графически зависимость потенциальной энергии. (**1 балл**)

Известно, что минимум потенциальной энергии достигается при $\boldsymbol{r}_{min}$ = 1 Å. Найдите чему равно $\boldsymbol{a}$. (**2 балла**)

Найдите минимальное значение потенциальной энергии если известно, что максимальная сила притяжения, действующую между зондом и поверхностью $\boldsymbol{F}_{max}$ = 10^{-9} Н. (**5 баллов**).

The interaction potential.

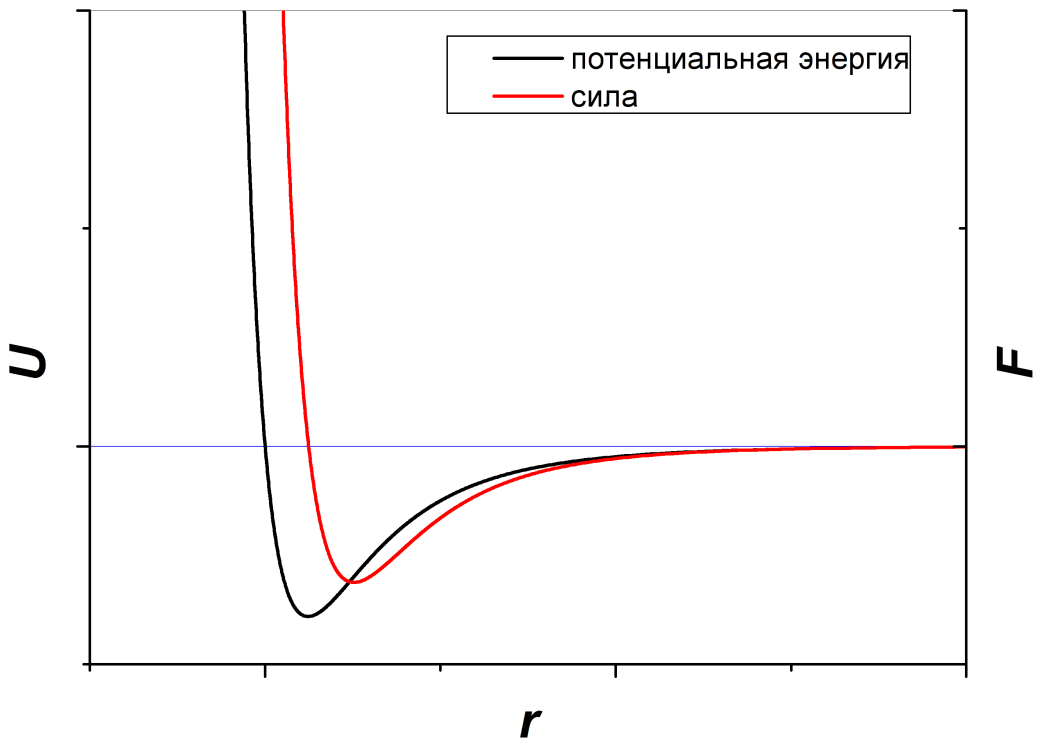
In atomic force microscopy (AFM) probes are used, which are elastic console with a sharp tip on the end. One can assume that the energy of interaction of the probe with the surface is described by the function: $U(r)=U_0\left(-\left(\frac{a}{r}\right)^6+\left(\frac{\sqrt{2}a}{r}\right)^{12}\right)$, where r – is the distance to the surface.

Plot the graph of the potential energy on the distance r. (**1 point**)

It is known that the potential energy minimum is achieved at r_{min} = 1 Å. Find constant $\boldsymbol{a}$. (**2 points**)

Find the minimum value of potential energy if it is known that the maximum force of attraction acting between the probe and the surface $\boldsymbol{F}_{max}$ = 10^{-9} N. (**5 points**).

Решение:



$$U(r)=U_0\left(-\left(\frac{a}{r}\right)^6+\left(\frac{\sqrt{2}a}{r}\right)^{12}\right)$$

Потенциальная сила связана с потенциальной энергией выражением: $\bar{F}=-grad\,U$

.

$$F_r(r)=\frac{-\partial U}{\partial r}=-U_0\left(\left(\frac{6a^6}{r^7}\right)-\left(\frac{12(\sqrt{2}a)^{12}}{r^{13}}\right)\right)$$

Экстремум этой функции можно найти посчитав производную F_r (r).

$$\frac{\partial F_r}{\partial r}=-U_0\left(-\left(\frac{42a^6}{r^8}\right)+\left(\frac{156(\sqrt{2}a)^{12}}{r^{14}}\right)\right)$$

Минимум потенциальной энергии достигается при $\frac{-\partial U}{\partial r}=0$, откуда можно выразить расстояние при котором минимальна потенциальная энергия, а сила равна 0. Из этого условия получаем: $r_{min}=\sqrt[6]{2}\cdot 2a$. $a=\frac{r_{min}}{\sqrt[6]{2}\cdot 2}\approx 0{,}45\,A$

Максимальная сила притяжения при $\frac{\partial F_r}{\partial r}=0$. Это условие позволяет выразить расстояние при котором сила притяжения максимальна $r_{max\,F}=\sqrt[6]{\frac{13}{7}}\cdot r_{min}=\sqrt[6]{\frac{26}{7}}\cdot 2a$.

Подставляя это значение в выражение для F_r (r) получаем U_0.

$$U_0=\frac{-F_{max}}{\left(\frac{6a^6}{r_{maxF}^7}\right)-\frac{12\left(\sqrt{2}a\right)^{12}}{r_{maxF}^{13}}}=\frac{-13}{36}\left(\frac{26}{7}\right)^{\frac{7}{6}}2^7\cdot F_{max}a\approx 9{,}6\cdot 10^{-18}\,Дж$$

Следует иметь ввиду, что сила притяжения имеет отрицательную проекцию на радиус-вектор, поэтому U_0 величина положительная.

Теперь можно выразить значение минимальной потенциальной энергии:

$$U_{min}=U_0\left(-\left(\frac{a}{r_{min}}\right)^6+\left(\frac{\sqrt{2}a}{r_{min}}\right)^{12}\right)=\frac{U_0}{2^7}\left(-1+\frac{1}{2}\right)\approx\frac{13}{72}\left(\frac{26}{7}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot F_{max}a=\frac{169}{504}\sqrt[6]{\frac{13}{7}}r_{min}\cdot F_{max}$$

$$U_{min}\approx -3{,}8\cdot 10^{-20}\,Дж\approx -0{,}23\,эВ$$