

Интерференционный датчик.

Решение:

а) Как видно из рисунка, на экран падают две плоские монохроматические волны. Между волновыми векторами малый угол 1° . Это приводит к тому, что на экране наблюдается интерференционная картина. Расстояние между соседними максимумами составляет:

$$\Delta X = \frac{\lambda}{\alpha} \approx 36 \text{ мкм}$$

При отклонении кантилевера происходит изменение угла падения, а следовательно изменяется и угол между волновыми векторами. Это приводит к изменению расстояния между соседними максимумами. При этом изменяется интенсивность света, падающего на фотодиод. Размер приемной площадки фотодиода меньше расстояния между максимумами ΔX .

б) При интерференции происходит сложение напряженностей электрических полей, и результирующая интенсивность:

$$I_{\text{рез}} = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 \cdot I_0} \cos(\Delta\phi)$$

Как видно из соотношения, результирующая интенсивность при интерференции изменяется от 0 до $4 I_0$. Датчик расположен там, где максимально изменение при малых отклонениях кантилевера. Это то место, где максимальна производная интенсивности по

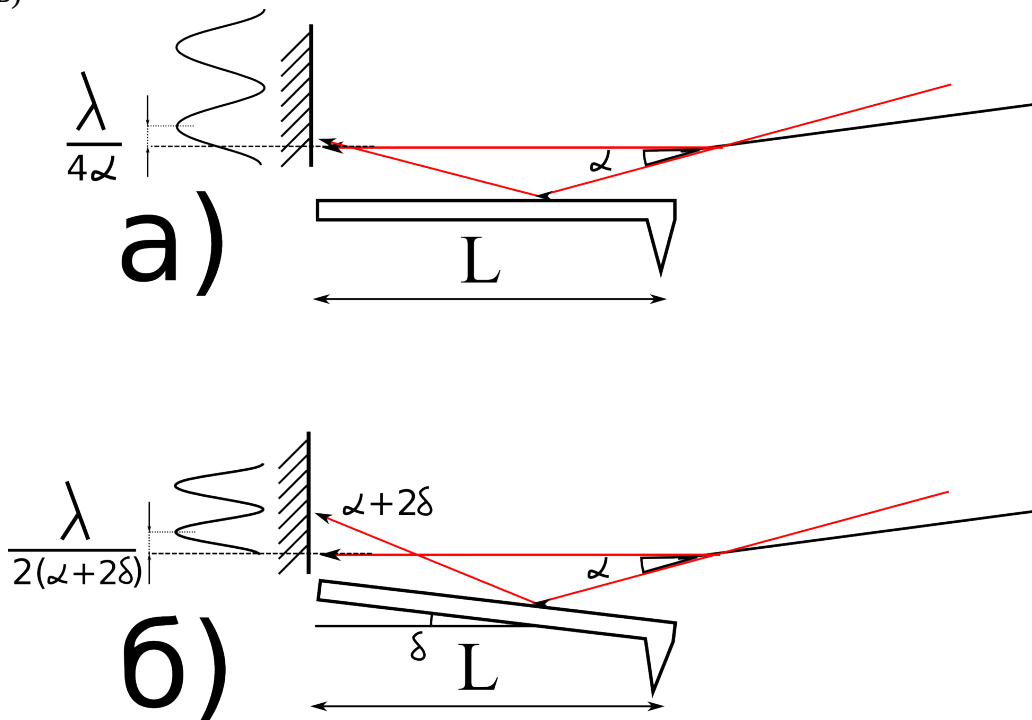
координате $\frac{\partial I}{\partial x}$. X — координата вдоль экрана. Интенсивность меняется вдоль оси X по

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda} X\right)$$

гармоническому закону:

Таким образом, когда кантилевер не отклонен датчик расположили посередине между максимумом и минимумом, где $I = 2 \cdot I_0$.

в)



На рисунке а) показана интерференционная картина в случае, когда кантилевер не отклонён. Как было рассмотрено в пункте б), в этом случае датчик находится в точке с амплитудой сигнала $2I_0$, т. е. на расстоянии от главного максимума в 4 раза меньшем, чем расстояние между максимумами. На рис. б) показан крайний случай, когда ещё имеет смысл говорить о сохранении гармоничности сигнала на датчике, т. к. при ещё более сильном отклонении кантилевера, сигнал на датчике будет дважды проходить через 0 (минимум интерференции) в течении одного периода колебания кантилевера. Следовательно,

максимальный угол отклонения кантилевера δ , соответствует первому минимуму интерференции, новой, более сжатой интерференционной картины. Приравниваем два условия друг другу:

$$\frac{\lambda}{4\alpha} = \frac{\lambda}{2(\alpha + 2\delta)} \quad (1)$$

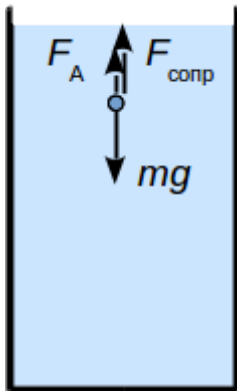
Отсюда $\alpha = 2\delta$. Считая угол α малым ($1^\circ = 1/57$ рад), получаем искомую максимальную амплитуду колебаний кантилевера:

$$x = L\delta = \frac{L\alpha}{2} \approx \frac{1000}{2 \cdot 57} = 9 \text{ нм.} \quad (2)$$

Также дополнительно можно рассмотреть вопрос влияния перекрытия пучков на сохранение гармоничности сигнала. При отклонении кантилевера отраженный луч отклоняется на 2δ . Где $\delta = A/L$ — угол поворота кантилевера. A — амплитуда. Чтобы наблюдалась интерференция, необходимо перекрытие пучков. $\Delta y > y_2 - y_1 = L(2\delta + \alpha) - L\alpha = 2A$. Δy — ширина пучков.

Ультрацентрифуга.

Решение.



Уравнение динамики в проекции на ось Y, направленную вертикально вниз:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A - F_{сопр} ,$$

Сила сопротивления: $F_{сопр} = kv$.

Приходим к уравнению вида:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A - kv .$$

Решение ищем в виде: $v(t) = v_0 \cdot (1 - e^{-\frac{kt}{m}})$ (1).

Из начального условия $v(0) = 0$, находим $v_0 = \frac{mg - F_A}{k}$.

Для сферических частиц $k = 6\pi\eta r$. Таким образом,

$$v_0 = \frac{(\rho_{зол} - \rho_{воды}) V g}{6\pi\eta r} = \frac{(\rho_{зол} - \rho_{воды}) \frac{4}{3}\pi r^3 g}{6\pi\eta r} = \frac{2(\rho_{зол} - \rho_{воды}) r^2 g}{9\eta} .$$

Введем τ : $v_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \tau = \frac{m}{k} = \frac{2(\rho_{зол}) r^2}{9\eta}$

Пройденный путь:

$$y(t) = \int_0^t v(t) dt = v_0 t - v_0 \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt = v_0 (t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau) \quad (2)$$

При естественном осаждении:

Для **наночастицы**: $\tau = \frac{2 \cdot 19,300 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 (10^{-8})^2 \text{ м}^2}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ с}$

$$v_0 = \frac{2(\rho_{зол} - \rho_{воды}) r^2 g}{9\eta} = \frac{2 \cdot (19,300 - 1) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} \cdot 9,8 (10^{-8})^2 \text{ м}^2 \approx 4 \cdot 10^{-9} \text{ м/с} = 4 \text{ нм/с}$$

Оценим время, которое потребуется **наночастице** для опускания на расстояние H с

постоянной скоростью v_0 : $t_0 = \frac{H}{v_0} = \frac{0,1 \text{ м}}{4 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 290 \text{ дней}$. Можно считать, что

скорость принимает максимальное значение v_0 практически мгновенно.

Для **микрочастицы**: $\tau = \frac{2 \cdot 19,300 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 (10^{-5})^2 \text{ м}^2}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$

$$v_0 = \frac{2(\rho_{зол} - \rho_{воды}) r^2 g}{9\eta} = \frac{2 \cdot (19,300 - 1) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} \cdot 9,8 (10^{-5})^2 \text{ м}^2 \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 4 \text{ мм/с}$$

Оценим время, которое потребуется **микрочастице** для опускания на расстояние H с

постоянной скоростью v_0 : $t_0 = \frac{H}{v_0} = \frac{0,1 \text{ м}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}} = 25 \text{ с}$. Можно считать, что скорость

принимает максимальное значение v_0 практически мгновенно и в этом случае.

При ультрацентрифугировании пробирки расположены практически горизонтально. Центробежная сила становится аналогом силы тяжести с ускорением a . Силой Архимеда можно пренебречь: во-первых, она направлена вертикально вверх, во-вторых, она мала по абсолютному значению по сравнению с центробежной.

Для **наночастицы**:
$$\tau = \frac{2 \cdot 19,300 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} (10^{-8})^2 \text{ м}^2 \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ с}$$

$$v_0 = \frac{2(\rho_{\text{зол}})r^2 a}{9\eta} = \frac{2 \cdot (19,300) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} 10^7 (10^{-8})^2 \text{ м}^2 \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 4 \text{ мм/с}$$

Оценим время, которое потребуется **наночастице** для опускания на расстояние H с постоянной скоростью v_0 : $t_0 = \frac{H}{v_0} = \frac{0,1 \text{ м}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}} = 25 \text{ с}$ Можно считать, что скорость принимает максимальное значение v_0 практически мгновенно и в этом случае.

Для **микрочастицы**:
$$\tau = \frac{2 \cdot 19,300 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} (10^{-5})^2 \text{ м}^2 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$$

$$v_0 = \frac{2(\rho_{\text{зол}})r^2 a}{9\eta} = \frac{2 \cdot (19,300) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}} 10^7 (10^{-5})^2 \text{ м}^2 \approx 4 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

Скорость превышает скорость звука в воде!

Оценим время, которое потребовалось бы микрочастице для опускания на расстояние H с постоянной скоростью v_0 : $t_0 = \frac{H}{v_0} = \frac{0,1 \text{ м}}{4 \cdot 10^2 \text{ м/с}} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

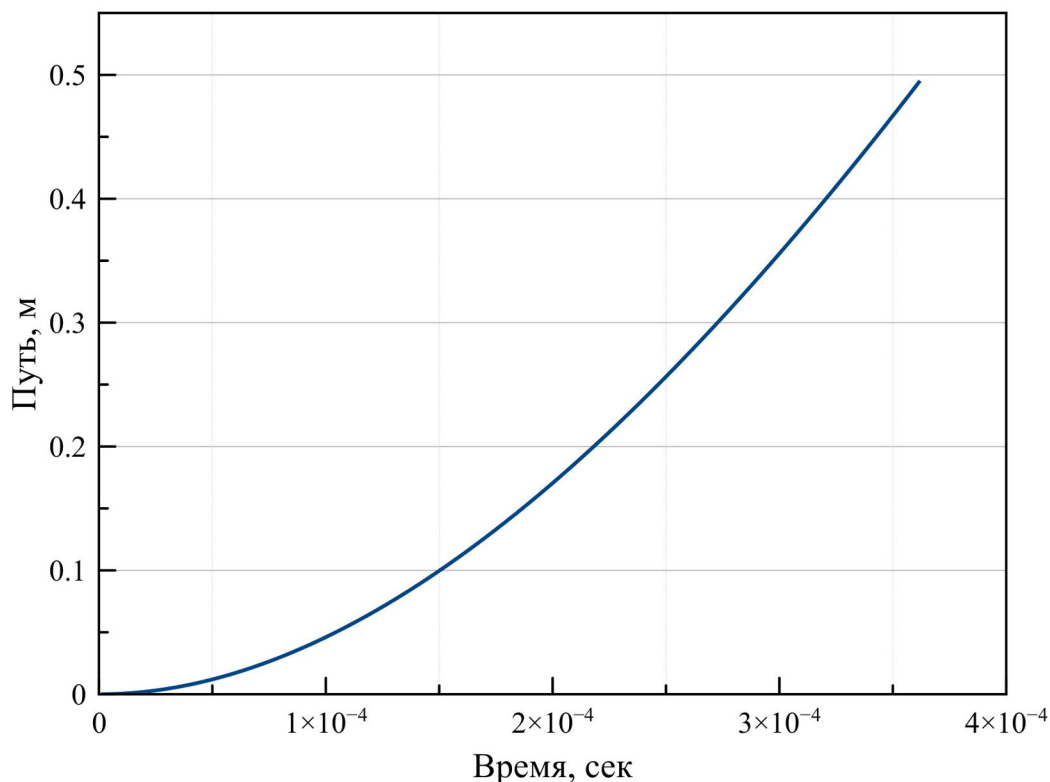


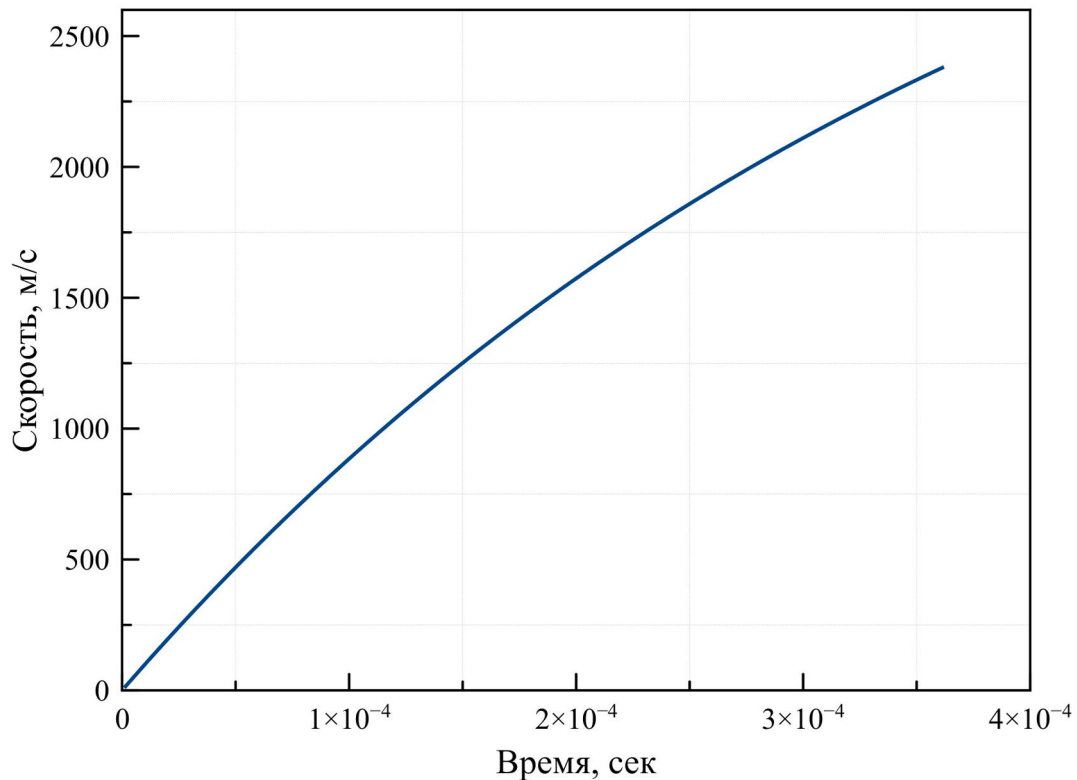
Рисунок 1

Обратим внимание на величину постоянной времени τ . Она превышает всё время в

пути, которое мы получили, в качестве оценки. Значит нельзя считать, что в этом случае скорость постоянна. Воспользуемся соотношениями (1) и (2), для того чтобы оценить время в пути и скорость в конце пути. Проще всего это сделать численно. Результаты представлены на рисунках 1 и 2.

Время в пути $t_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ сек. Скорость при этом $v = 1250$ м/с.

Очевидно, такая скорость не будет достигнута, т. к. при больших скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Это приведет к увеличению времени осаждения.



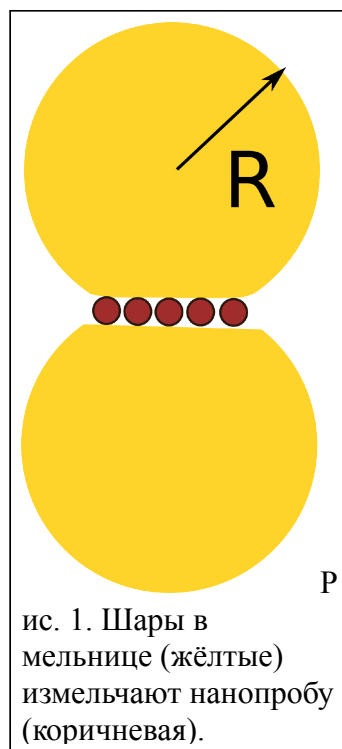
Ответ:

	Микрочастица	Наночастица
Естественное осаждение	25 сек	$2.5 \cdot 10^7$ сек
Ультрацентрифугирование	более $1,5 \cdot 10^{-4}$ сек	25 сек

Задача 3. Мельница для наноматериалов

Одним из распространённых методов получения наночастиц является помол макроскопических материалов в мельницах. Как правило, для измельчения пробы используются массивные твёрдые шары, помещённые в специальный стакан. Помол пробы происходит в местах соприкосновения шаров, которые деформируются при взаимодействии друг с другом, под действием прижимающей силы. Теория показывает, что скорость помола пропорциональна площади соприкосновения шаров. Некоторые мельницы позволяют достигать наноразмеров для целого ряда материалов, таких как Si , Al_2O_3 , SiO_2 , Fe_2O_3 и других.

Нанотехнолог Василий использовал шаровую мельницу для измельчения наночастиц оксида кремния. В качестве исходного образца он использовал водную суспензию микрочастиц, т. к. это позволило достичь более тонкого помола. После помола в течение $t_0 = 21$ часа шарами радиуса $R = 5$ мм, средний размер наночастиц достигал требуемых 100 нм. Василий счёл, что помол длится слишком долго и заменил шары на новые, изготовленные из того же материала, но радиуса $r = 100$ мкм. Какое время понадобится Василию для достижения тех же средних размеров пробы (**а; 8 баллов**)? Почему Василий использовал помол жидкой пробы, а не сухой (**б; 1 балл**)? Из какого материала могли быть сделаны шары в мельнице: оксид циркония, медь, карбид вольфрама, оксид магния (**в; 1 балл**)? Поперечным растяжением шаров при деформации пренебречь.



ис. 1. Шары в мельнице (жёлтые) измельчают нанопробу (коричневая).

Решение.

а) Как известно, фактор заполнения шарами пространства не зависит от их радиуса и примерно равен 0,9. Следовательно, скорость помола пробы напрямую связана с суммарной площадью контактов между шарами в единичном объёме, S_{full} . А она пропорциональна площади одного контакта между шарами S и концентрации шаров, C .

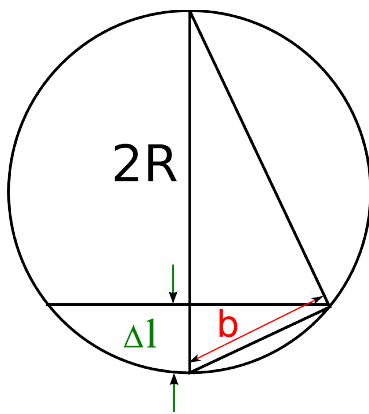
$$S_{full} \sim SC \sim \frac{S}{R^3} \quad (1)$$

Рассчитать площадь одного контакта можно исходя из выражения для модуля Юнга, E :

$$E = \frac{Fl}{S\Delta l} \quad (2)$$

Формула справедлива для стержня, но в первом приближении применим её к шару. Здесь l — длина стержня, в нашем случае $2R$, Δl — глубина деформации шаров, F — сила прижима, равная ma , где a — ускорение свободного падения для бисерных мельниц, либо ускорение стакана для планетарных, вибрационных и др. В любом случае величина a одинакова для обоих типов шаров. Если плотность шаров равна ρ :

$$E = \frac{8\rho a R^4}{3S\Delta l} \quad (3)$$



Величину S можно рассчитать, исходя из простых геометрических соображений, считая Δl малой величиной:

$$b/2R = \Delta l / b;$$

$$b^2 = 2R\Delta l;$$

$$S = \pi b^2 = 2\pi\Delta l R$$

Подставляем S в (2), получаем:

$$E = \frac{4\rho a R^4}{3\Delta l^2 R} \quad (4)$$

Теперь нужно найти Δl :

$$\Delta l = \sqrt{\frac{4\rho a}{3E}} R^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

Теперь находим S :

$$S = 2 \pi \Delta l R = 2 \pi \sqrt{\frac{4 \rho a}{3 E}} R^{\frac{5}{2}} . \quad (6)$$

Подставляем (6) в (1), получаем:

$$S_{full} \sim \frac{R^{\frac{5}{2}}}{R^3} \sim \frac{1}{\sqrt{R}} . \quad (7)$$

Отсюда окончательное выражения для искомого t :

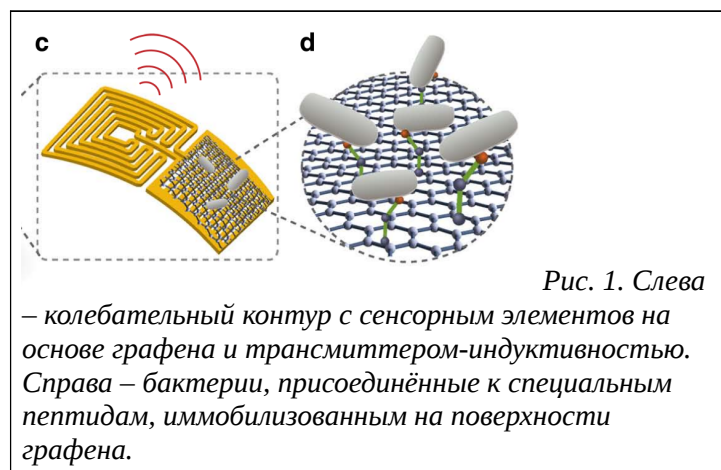
$$t = t_0 \sqrt{\frac{r}{R}} = 21 \sqrt{\frac{1}{50}} \approx 3 \text{ часа} . \quad (8)$$

б) Использование жидкой пробы позволяет избежать избыточной агломерации наночастиц друг с другом. Поэтому помол происходит более эффективно.

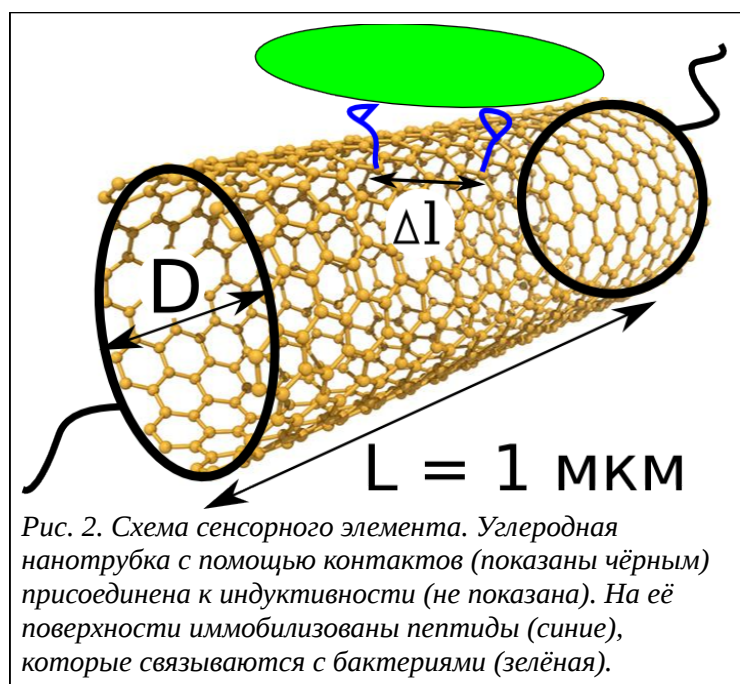
в) Подходят оксид циркония и карбид вольфрама, т. к. они имеют большую твёрдость, чем у оксида кремния, из которого состоит проба. Другие материалы более мягкие, чем проба.

Задача 4. Нанотрубчатый сенсор.

Американские учёные из Принстона разработали сенсор на бактерии на основе графена – монослоя графита. Они присоединили к поверхности специальные молекулы, к которым “прилипают” бактерии определённого вида, в результате проводимость структуры изменяется. На поверхность графена они нанесли металлические контакты так, что получился конденсатор, и соединили с индуктивностью (Рис. 1). Измеряя добротность контура, они смогли определить концентрацию бактерий в пробе.



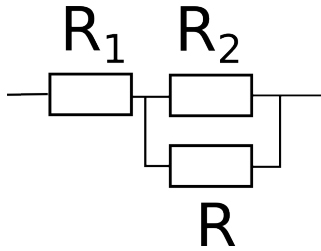
Томские учёные в ответ использовали вместо графена одностенную углеродную нанотрубку. Длина трубки составила $L = 1$ мкм, диаметр $D = 200$ нм, концентрация носителей заряда $n_e = 10^{12}$ см $^{-2}$, а их подвижность $\mu = 30\,000$ см 2 /В*с. Напряжение между контактами учёные подобрали таким образом, чтобы для нанотрубки выполнялся закон Ома. Бактерия с сопротивлением 200 кОм, присоединялась к сразу к двум пептидам на расстоянии $\Delta l = 100$ нм (Рис. 2). При каком взаимном расположении пептидов на поверхности нанотрубки, изменение её проводимости будет максимальным? Почему **(а; 2 балла)**? Какое минимальное количество бактерий должно присоединиться к поверхности, чтобы добротность контура изменилась на 1% **(б; 8 баллов)**? Научные исследования показали, что при малом диаметре нанотрубки, её проводимость не зависит от её размеров и присоединённой нагрузки, поэтому её нельзя использовать как сенсорный элемент. Как объясняется данное явление **(в; 2 балла)**? Найдите диапазон диаметров нанотрубки, в котором её проводимость постоянна **(г; 3 балла)**.



Решение.

а) Изменение проводимости будет максимальным, если пептиды расположены вдоль нанотрубки, т.к. в этом случае сопротивление включается параллельно оси нанотрубки, если пептиды расположены перпендикулярно оси нанотрубки — проводимость не изменится. В остальных случаях изменение будет промежуточным между двумя рассмотренными крайними вариантами.

б) Нанотрубку с присоединённой бактерией можно представить в виде эквивалентной схемы:



Здесь R_2 — сопротивление части нанотрубки длиной Δl , R_1 — сопротивление оставшейся части нанотрубки длиной $(L - \Delta l)$. Полное сопротивление будет равно:

$$R_{full} = R_1 + \frac{R R_2}{R + R_2} = \frac{\rho(L - \Delta l)}{\pi D} + \frac{R \frac{\rho \Delta l}{\pi D}}{R + \frac{\rho \Delta l}{\pi D}} = \frac{\rho(L - \Delta l)}{\pi D} + \frac{R \rho \Delta l}{R \pi D + \rho \Delta l}, \quad (1)$$

здесь ρ — удельное сопротивление нанотрубки на единицу площади. Изменение сопротивления при адсорбции бактерии будет равно:

$$\Delta R = R_0 - R_{full} = \frac{\rho L}{\pi D} - R_{full} = \frac{\rho \Delta l}{\pi D} - \frac{R \rho \Delta l}{R \pi D + \rho \Delta l} = \frac{\rho \Delta l R \pi D + \rho^2 \Delta l^2 - R \rho \Delta l \pi D}{\pi D (R \pi D + \rho \Delta l)} = \frac{\rho^2 \Delta l^2}{\pi D (R \pi D + \rho \Delta l)} \quad (2)$$

Добротность колебательного контура равна:

$$Q = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L_0}{C}}, \quad (3)$$

где R_0 — его сопротивление, L_0 — индуктивность, а C — ёмкость. Таким образом, изменение добротности равно:

$$\epsilon_Q = n \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{n \rho \Delta l^2}{L (R \pi D + \rho \Delta l)} = 0.1, \quad (4)$$

где n — количество адсорбированных бактерий. Отсюда:

$$n = \frac{L \epsilon_0 (R \pi D + \rho \Delta l)}{\rho \Delta l^2} . \quad (5)$$

В рамках модели Друде:

$$\rho = (en_e \mu)^{-1} . \quad (6)$$

Обратите внимание, что ρ в данном случае имеет размерность Ом, а не Ом*м. Отсюда финальное выражение для n :

$$n = \frac{L \epsilon_0 (R \pi D en_e \mu + \Delta l)}{\Delta l^2} = \frac{10^{-6} \cdot 0.01 \cdot (2 \cdot 10^5 \cdot 3.14 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 3 + 10^{-8})}{10^{-12}} = 3 \quad (7)$$

в) Постоянство сопротивления при изменении размеров нанотрубки связана с квантовыми эффектами. Сопротивление нанообъектов квантуется и один квант равен $h/e^2 \sim 25,8$ кОм. Таким образом, в первом приближении можно считать, что если классическое сопротивление превышает данное значение, то оно равняется одному кванту, т. е. 25,8 кОм. При этом важно отметить, что первичными являются кванты проводимости, которые ограничивают проводимость структуры снизу, поэтому кванты сопротивления, как обратные величины, ограничивают сверху. Очевидно, что в таком режиме сенсор работать не может, т. к. сопротивление нанотрубки не зависит наличия присоединённых бактерий.

г) Найдём критический размер нанотрубки D_{cr} , при котором её сопротивление будет равно одному кванту.

$$\frac{L}{\pi D_{cr} en_e \mu} = \frac{h}{e^2} \quad (8)$$

Отсюда находим D_{cr} :

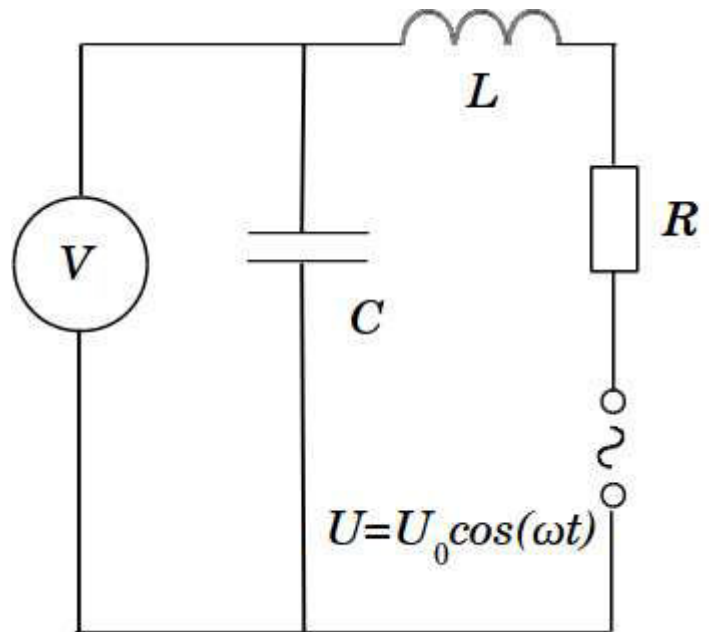
$$D_{cr} = \frac{L e^2}{\pi h e n_e \mu} = \frac{10^{-6}}{3.14 \cdot 2.58 \cdot 10^4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 3} = 2.6 \text{ нм} \quad (9)$$

Ответ: $D_{cr} = 0 \text{ — } 2.6 \text{ нм}$.

Зонд.

Решение.

На эквивалентной схеме изображен последовательный RLC контур, к которому приложено внешнее гармоническое напряжение. Обкладками конденсатора служат зонд и исследуемая поверхность. Напряжение измеряют на конденсаторе C . На графиках представлены типичные амплитудно-частотные зависимости в полулогарифмическом масштабе, на которых проявляется резонанс напряжения на конденсаторе.



1. Найти L . Это можно сделать 2 способами: из полуширины резонансного пика, что в представленном масштабе сложно сделать точно. Другой способ: из отношения амплитуд в резонансе и при нулевой частоте. Одно из определений добротности Q для электрического колебательного контура позволяет найти следующую связь:

$$\frac{U_{рез}}{U_0} = Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_{рез} CR}, \text{ где } \omega_{резонанс} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$C_{красн} = \frac{U_0}{U_{резкрасн} \omega_{резкрасн} R} = \frac{100 \text{ мВ}}{5000 \text{ мВ} \cdot 3,2 \cdot 10^7 (\text{рад/с}) \cdot 10 \text{ Ом}} = 6,25 \cdot 10^{-11} \text{ Ф}$$

$$L = \frac{1}{C_1 \omega_{рез}^2} = \frac{U_{рез} R}{U_0 \omega_{рез}} = \frac{5000 \text{ мВ} \cdot 10 \text{ Ом}}{100 \text{ мВ} \cdot 3,2 \cdot 10^7 \text{ рад/с}} \approx 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

2. $\frac{\omega_{красн}^2}{\omega_{син}^2} = \frac{C_{син}}{C_{красн}} > 1$, что следует из $\omega_{резонанс} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, и положения пиков на графиках.

Значит синяя кривая соответствует большей ёмкости. При сближении зонда с поверхностью ёмкость увеличивается. Это следует из самой простой модели плоского конденсатора, так и более сложных. Значит **синему графику** (№2) соответствует меньшее расстояние до поверхности.

3. Как было отмечено выше, при сближении ёмкость увеличивается, что приводит к **уменьшению резонансной частоты и амплитуды в резонансе**. При максимальном удалении 10 мкм можно грубо полагать, что проводник (т. е. Зонд) уединен. Наконечник можно рассматривать, как уединенную сферу. Минимальная ёмкость - при максимальном удалении. При сближении на 50 нм ёмкость максимальна, но туннельными эффектами можно пренебречь.

Восстание нанороботов

В своей книге «Машины создания: Грядущая эра нанотехнологии» К.Э. Дрекслер – американский физик и теоретик молекулярной нанотехнологии – описывает гипотетическую ситуацию неограниченного размножения самовоспроизводящихся нанороботов и последующий за этим «конец света». Согласно этому сценарию нанороботы, которые запрограммированы на непрерывное создание собственной копии из окружающего биологического материала через каждые 1000 секунд, выходят из под контроля и поглощают всю доступную биомассу Земли. Оценить минимальное время (в часах) наступления «конца света» в случае реализации такого апокалиптического сценария (**3 балла**). На сколько километров от исходной точки смогут распространиться нанороботы за первые сутки от начала «восстания»? (**5 баллов**). Масса каждого наноробота равна $m_0 = 1 \cdot 10^{-25}$ кг. Биомассу Земли принять равномерно распределенной по поверхности и равной $M = 2 \cdot 10^{15}$ кг. В расчетах Землю считать шаром с радиусом $R = 6371$ км.

Решение:

«Размножение» нанороботов прекратится в тот момент, когда вся биомасса будет «переработана», что и будет означать наступление «конца света». Если предположить, что скорость распространения нанороботов ничем не ограничена (что будет соответствовать минимальному времени их распространения), то для вычисления искомого времени достаточно определить их количество в момент наступления «конца света», как отношение всей биомассы Земли к массе одного робота. Следовательно, к этому моменту будет произведено $N = M/m_0 = 2 \cdot 10^{40}$ нанороботов. Учитывая, что за время t секунд количество самовоспроизведенных нанороботов равно $n = 2^{t/1000}$, искомое время τ можно найти из равенства: $N = 2^{\tau/1000}$, откуда: $\tau = 1000 \cdot \log_2 N \approx 133877$ сек ≈ 37 часов.

Для ответа на второй вопрос будем считать, что нанороботы распространяются одинаково по всем направлениям, «замещая» собою окружающую биомассу. Таким образом, их поверхностная плотность должна оставаться постоянной в любой момент времени и равной плотности распределения биомассы по поверхности Земли $M/S_3 = M/4\pi R^2 \approx 3,921$ кг/м². Пусть L – расстояние (длина дуги окружности), пройденное нанороботами по поверхности Земли (вдоль какого-либо направления) к данному моменту времени. Тогда площадь поверхности шарового сегмента, занятого нанороботами к этому времени: $S_{\text{шар.сегм.}} = 2\pi R h = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$, где α – угол, соответствующий дуге L : $\alpha = L/R$. Учитывая, что масса самовоспроизведенных нанороботов равна $m_0 n$, для их поверхностной плотности получаем формулу:

$$\rho_{\text{пов}} = m_0 n / S_{\text{шар.сегм.}} = m_0 \cdot 2^{t/1000} / 2\pi R^2 (1 - \cos(L/R))$$

Тогда из равенства $\rho_{\text{пов}} = M/4\pi R^2$ получаем:

$$m_0 \cdot 2^{t/1000} = M/2 (1 - \cos(L/R)),$$

откуда: $L = R \arccos(1 - (2/M) m_0 \cdot 2^{t/1000})$.

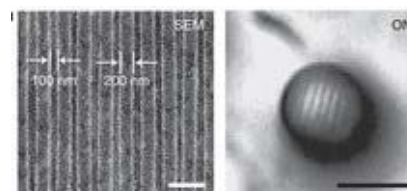
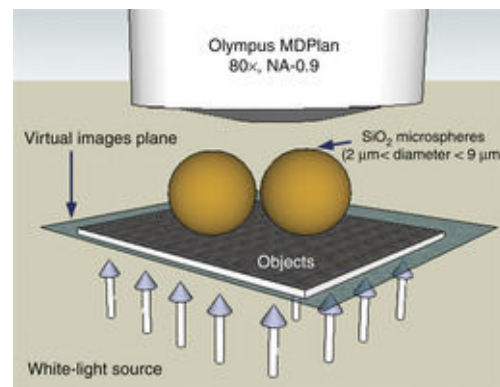
Подставляя в это выражение $t = 86400$ сек, получаем, что за первые сутки роботы распространятся на расстояние:

$$L \approx 9 \cdot 10^{-4} \text{ км.}$$

Т.к. полученное значение оказалось достаточно малым, то в расчетах можно было пренебречь кривизной поверхности Земли и считать, что через сутки после восстания нанороботы будут занимать круг площадью πL^2 , причем их масса будет равна $m = m_0 \cdot 2^{86400/1000} \approx 10,2$ кг, что, учитывая найденную выше поверхностную плотность, дает следующую формулу для нахождения пройденного расстояния: $L = 2R ((m_0 \cdot 2^{86400/1000})/M)^{1/2} \approx 9 \cdot 10^{-4}$ км.

Наноскоп

Необычный метод преодоления дифракционного предела был предложен недавно физиками из научного центра в Сингапуре в сотрудничестве с учеными из Великобритании. Предельная разрешающая способность обычного оптического микроскопа ограничена значением $\sim \lambda/2$ вследствие дифракции света. Для повышения разрешения в работе учеными было предложено использовать прозрачные стеклянные микросферы с размером несколько микрометров, помещая их непосредственно на исследуемый объект (см. рис.). В результате удалось достичь разрешения 50 нм при использовании источника белого света и стандартного оптического микроскопа.



Какой оптический прибор является ближайшим аналогом такого наноскопа? (1 балл). На каком физическом принципе основан предложенный метод? (6 баллов). Какими преимуществами обладает данная технология по сравнению с аналогичными? (3 балла)

Решение

Ближайшим аналогичным прибором может выступать изобретенный в 1982 г. сканирующий оптический микроскоп ближнего поля, т.к. физический принцип работы у них схож (кроме того, на этом же принципе основана работа так называемых суперлинз, изобретение которых в 2000 г. стало возможным с появлением метаматериалов). Суть в том, что при освещении светом в узкой зоне вблизи исследуемой поверхности возникает затухающее электромагнитное поле, которое отображает физико-химическую структуру этой поверхности. Взаимодействие зонда ближнепольного микроскопа с локальным затухающим полем позволяет воспроизвести профиль поверхности, причем зонд здесь играет роль оптической антенны: затухающее поле преобразуется в распространяющуюся по зонду излучающую моду. Формирование изображения осуществляется по отдельным точкам путем сканирования поверхности и регистрации излучаемого света. Похожий эффект наблюдается и для микросфер: они с одной стороны фокусируют падающий свет в пятно субволнового размера, а с другой – транслируют ближнепольное изображение нижележащего объекта с формированием увеличенного изображения на обратной стороне микросферы. Именно на эту точку и фокусируется объектив обычного микроскопа, что и позволяет в конечном счете преодолеть дифракционный предел и получить изображение объекта в дальнем поле с достаточно высоким разрешением. Среди преимуществ данной технологии стоит отметить следующие: 1) доступность для воспроизведения и низкая стоимость; 2) высокая скорость получения изображения и сканирования поверхности; 3) высокая эффективность преобразования затухающего поля в излучающую моду.

Туннельный ток

Одним из методов изучения поверхности веществ с нанометровым разрешением является сканирующая туннельная микроскопия, в основе которой лежит явление «туннелирования» электронов проводимости через потенциальный барьер, величина которого приближенно равна средней работе выхода электронов из материалов зонда и исследуемого образца. Расчеты показывают, что для плотности туннельного тока справедлива следующая приближенная формула:

$$j = j_0 e^{-kx}, \text{ где } k = \frac{4\pi}{h} \sqrt{2mA}$$

здесь: j_0 – некая функция, зависящая от приложенного напряжения, x – расстояние между зондом и поверхностью, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона, A – средняя работа выхода.

Начинающий экспериментатор Петр, изучая поверхность своего образца, заметил, что при непосредственном контакте зонда и поверхности (т.н. контактный режим работы) туннельный ток составлял 1 нА. Этот ток показался ему недостаточным, поэтому он заменил зонд на аналогичный, но с радиусом закругления в 5 раз большим. После этого Петр перевел микроскоп в бесконтактный режим и произвел исследование своего образца, причем среднее значение туннельного тока равнялось при этом 0,25 пА. На каком среднем расстоянии от поверхности находился зонд во время этого исследования, если известно, что средняя работа выхода электронов равна 5 эВ? (4 балла). На каком максимальном расстоянии от поверхности образца туннельный ток все еще можно было зафиксировать, если точность используемого амперметра составляет 0,01 пА? (4 балла) Прикладываемое напряжение считать во всех экспериментах одинаковым.

Решение

Контактный режим работы означает, что туннельный ток определяется только произведением плотности тока j_0 и площади острия. Последняя, в свою очередь, квадратично зависит от радиуса закругления зонда. Т.о. после замены зонда туннельный ток в контактном режиме составлял 25 нА. Найдем коэффициент затухания $k = \frac{4\pi}{h} \sqrt{2mA} \approx 23 \text{ нм}^{-1}$. Это значение соответствует уменьшению тока примерно в 10 раз при увеличении расстояния зонд-образец на 1 Å. Следовательно, при туннельном токе 0,25 пА соответствующее расстояние между поверхностью и зондом равняется 5 Å. Предельное расстояние x_{max} определяется из соотношения: $I = I_0 e^{-kx_{max}} = 0,01 \text{ пА}$, где $I_0 = 1 \text{ нА}$ для зонда №1 и $I_0 = 25 \text{ нА}$ для зонда №2. Следовательно, для зонда №1 $x_{max} \approx 5 \text{ Å}$, а для зонда №2 $x_{max} \approx 6,4 \text{ Å}$.

Модель нервного импульса (8 баллов)

Аксоны, по которым нейроны передают сигналы, представляют собой заполненные электролитом (аксоплазмой) микротрубки, в которых внутренняя проводящая среда отделена от межклеточного электролита мембраной. Возникающий при передаче сигнала электрический ток – движение ионов в аксоплазме по аксону – сталкивается с электрическим сопротивлением аксоплазмы и электростатическими эффектами, вызванными перераспределением зарядов на оболочке. При этом передача сигнала между последовательными элементами в такой цепи дискретна: т.е. каждый элемент (например, соседний нейрон) не включается до тех пор, пока на его «вход» не поступит достаточное напряжение с «выхода» предыдущего элемента. Упрощенно, электрическая схема такой последовательности может быть представлена следующим образом:

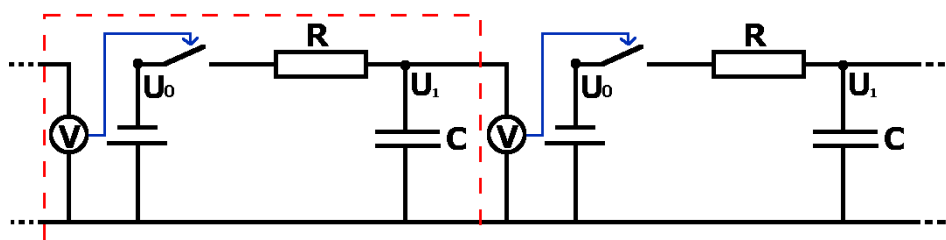
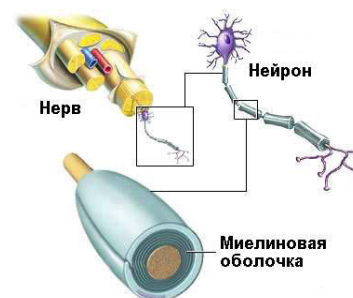


Рис.1 Электрическая схема модели передачи нервного импульса. Резистору условно соответствует электрическое сопротивление элемента R , а конденсатору – емкость его мембраны C . Следующий элемент включается тогда, когда напряжение на конденсаторе достигнет некоторого порогового значения (т.е. конденсатор зарядится).

1. Как будет меняться со временем напряжение U_1 на конденсаторе C при подаче на вход этого элемента напряжения U_0 ? Какую величину считают временем заряда конденсатора? (2,5 балла)

2. Если длина одного элемента равна l , какова будет скорость распространения сигнала по последовательности из таких элементов? (0,5 балла)

Отличительной особенностью некоторых аксонов позвоночных является наличие миелиновой оболочки – дополнительной электроизолирующей мембранной оболочки, многократно обернутой вокруг аксона подобно изоляционной ленте.



3. В рамках приведенной модели рассчитайте (4 балла) скорость распространения нервного импульса по покрытым и не покрытым миелиновой оболочкой аксонам, если:

- длина одного элемента $l = 1$ мм;
- радиус аксонов $r = 5$ мкм;
- толщина липидной мембраны $d_1 = 5$ нм;
- суммарная толщина липидной мембраны с миелиновым слоем $d_2 = 1$ мкм;

- диэлектрическая проницаемость липидов и миелина $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$ Ф/м;

- удельное сопротивление аксоплазмы $\rho = 2$ Ом*м.

4. Исходя из полученного результата, поясните, с какой «электротехнической» целью природой были созданы миелиновые нанопокрывтия нервов. (1 балл)

Ответ.

1. $U_1(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/RC} \right)$

Временем зарядки конденсатора называют промежуток времени, за который потенциал достигнет значения $U_0(1 - e^{-1}) \approx 0,63U_0$.

$$-\frac{\tau}{RC} = -1 \text{ или } \tau = RC.$$

2. Скорость распространения равна скорости прохождения отдельного элемента:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{l}{\tau} = \frac{l}{RC} = \frac{l}{\left(\frac{\rho l}{\pi^2}\right) \cdot \left(\frac{2\pi l \varepsilon_a}{d}\right)} = \frac{\pi^2 l d}{2\pi \varepsilon_a \rho l^2} = \frac{rd}{2\rho \varepsilon_a l}$$

Здесь $C = \frac{\varepsilon_a \cdot 2\pi l}{\ln\left(\frac{r+d}{r}\right)} = \frac{2\pi l \varepsilon_a}{\ln\left(1 + \frac{d}{r}\right)} \approx \frac{2\pi l \varepsilon_a r}{d}$ емкость цилиндрического конденсатора при $d \ll r$.

3.

Без миелинового слоя: $v_1 = \frac{rd_1}{2\rho \varepsilon_a l} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 0,125 \text{ м/с}$

С миелиновым слоем: $v_2 = \frac{rd_2}{2\rho \varepsilon_a l} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 25 \text{ м/с}$

4. Миелиновое покрытие необходимо для увеличения скорости передачи нервного импульса.

Поверхность меди (12 баллов)

При переходе к наномасштабу физические свойства веществ во многом начинают определяться структурой и свойствами их поверхности.

Монокристаллическая медь имеет элементарную ячейку, представленную на рисунке 1 (центры атомов меди лежат в вершинах и центрах граней куба). В зависимости от способа «разрезания», из монокристалла меди можно получить разные поверхности, которые будут сильно различаться по своим физическим и химическим свойствам.

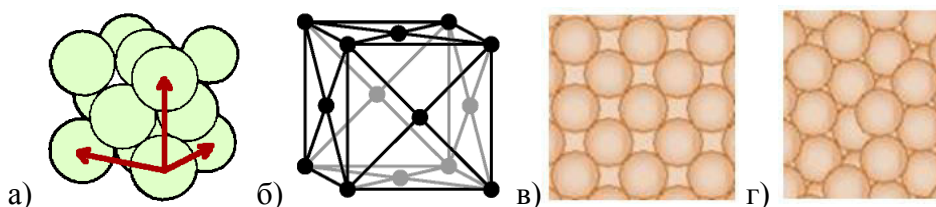


Рис. 1 а), б) Элементарная ячейка меди. в), г) примеры поверхностей, получающихся при разрезании монокристалла меди.

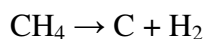
1. Сколько различных поверхностей можно получить, если «разрезать» монокристалл меди так, чтобы плоскость «разреза» проходила как минимум по трем точкам в вершинах элементарной ячейки? Ответ проиллюстрируйте рисунком. (При «разрезе» считать, что атомы, центры которых лежат на секущей плоскости, принадлежат обеим образующимся поверхностям) (2 балла)

2. Определите координационное число атома меди (количество атомов, с которыми соприкасается данный) в бесконечном монокристалле и в полученных при «разрезании» поверхностях. (2,5 балла)

3. Оцените, во сколько раз отличаются энергии, приходящиеся на единицу площади, для получившихся поверхностей. (3 балла)

4. По какой из рассматриваемых плоскостей будет проще всего расколоть монокристалл меди? Какая из поверхностей будет проявлять наилучшие сорбционные и каталитические свойства? (2 балла)

Поверхность меди используется для получения листов графена высокотемпературным пиролизом метана:

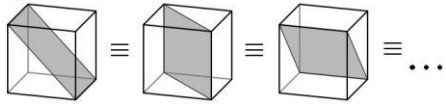
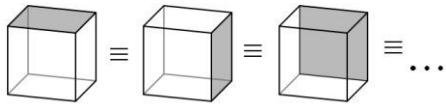


Для образования больших по размеру бездефектных листов графена необходимо, чтобы промежуточные продукты пиролиза, объединяющиеся в растущий лист, имели возможность легко передвигаться по медной поверхности к его краям.

5. На какой из полученных в п.1 медных поверхностей стоит ожидать образование идеальных графеновых листов? Какие еще дополнительные факторы могут способствовать росту графена на этой поверхности? Поясните. (2,5 балла)

Ответ:

1. Поскольку все вершины одинаковы, поверхностей будет всего три типа:

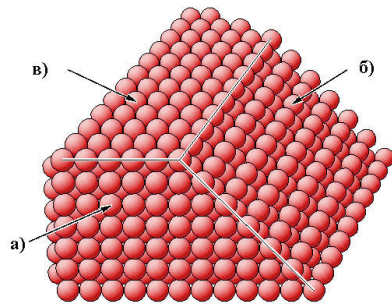
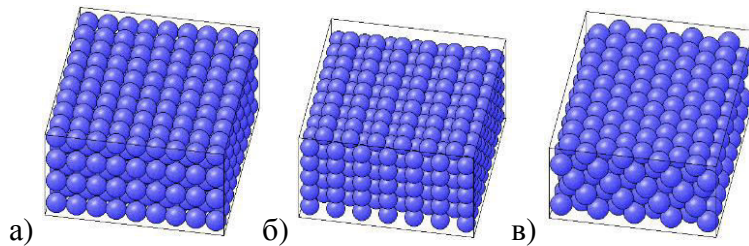


а) три точки лежат на ребрах одной грани – плоскость проходит через грань куба

б) две точки лежат на ребре, третья на ребре не лежащем на одной грани с двумя предыдущими

в) три точки находятся на диагоналях трех разных граней

Соответственно:



2. В монокристалле каждый атом меди в ячейке имеет по 12 соседей.

Поверхность тип а): координационное число равно 8 (на примере атома в центре грани элементарной ячейки: 4 соседа-вершины ячейки (в одном слое с рассматриваемым атомом) и 4 соседа – центры перпендикулярных граней в ячейке (слой, лежащий под поверхностью)).

Поверхность тип б): на этой поверхности присутствует два типа атомов – на вершинах бороздок с координационным числом 7 (при получении этой поверхности каждый из поверхностных атомов этого типа потерял по 5 соседей) и в глубине бороздок с координационным числом 11 (потерян один сосед «сверху»).

Поверхность типа в): координационное число равно 9 (6 соседей в слое и еще 3 – в нижележащем).

3. 1) Примем энергию каждой связи металл-металл равной U . Тогда:

На каждый атом на поверхности а) приходится $(12-8)*U/2 = 2U$ энергии некомпенсированных связей.

На каждый атом первого типа на поверхности б) приходится $(12-7)*U/2 = 2,5U$ энергии некомпенсированных связей.

На каждый атом второго типа на поверхности б) приходится $(12-11)*U/2 = 0,5U$ энергии некомпенсированных связей.

На каждый атом на поверхности в) приходится $(12-9)*U/2 = 1,5U$ энергии некомпенсированных связей.

2) Рассчитаем площади, приходящиеся на один атом поверхности каждого из типов:

а) На квадрат со стороной a приходится $1+1/4*4=2$ атома меди, то есть, на один атом приходится $0,5a^2$.

б) На прямоугольник со сторонами a и $\sqrt{2}a$ приходится $2*1/2+4*1/4=2$ атома меди первого типа и $1+2*1/2=2$ атома второго типа.

То есть, на атом меди каждого типа приходится $\frac{\sqrt{2}}{2} a^2$.

в) На равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{2}a$ приходится $3*1/6+3*1/2=2$ атома меди, то есть, на один атом приходится $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

3) Рассчитаем, какая энергия некомпенсированных связей приходится на единицу площади для каждого из типов:

а) $2U/0,5a^2=4U/a^2$

б) $\frac{2,5U}{\sqrt{2}a^2/2} = \frac{5U}{\sqrt{2}a^2}$ на атом первого типа, $\frac{0,5U}{\sqrt{2}a^2/2} = \frac{U}{\sqrt{2}a^2}$ на атом второго типа, всего

$\frac{3\sqrt{2}U}{a^2}$.

в) $\frac{1,5U}{\sqrt{3}a^2/4} = \frac{2\sqrt{3}U}{a^2}$

4) а:б:в = $\frac{4U}{a^2} : \frac{3\sqrt{2}U}{a^2} : \frac{2\sqrt{3}U}{a^2} = 4 : 3\sqrt{2} : 2\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} : 1 \approx 1,15 : 1,22 : 1$

4. Проще всего расколоть вдоль поверхности типа в) – она имеет минимальную энергию некомпенсированных связей, то есть самая энергетически выгодная.

Наилучшими каталитическими и сорбционными свойствами обладает поверхность с максимальной энергией некомпенсированных связей – тип б). Данный вывод легко сделать и без подсчета энергии, поскольку эта поверхность наиболее «неровная» и содержит атомы с минимальным координационным числом.

5. Скорость диффузии промежуточных продуктов по поверхности меди тем выше, чем более гладкой является эта поверхность, и чем меньше усилий необходимо приложить, чтобы эти молекулы/атомы «перепрыгнули» из одного положения в соседнее (кроме того, соседнее положение должно быть как можно ближе). Очевидно, что лучше всех этим условиям отвечает тип поверхности в). Кроме того, на такой поверхности возможна дополнительная стабилизация шестиугольных циклов графена благодаря ее симметрии:

