06. Эпидемия как дендример *(13 баллов)*

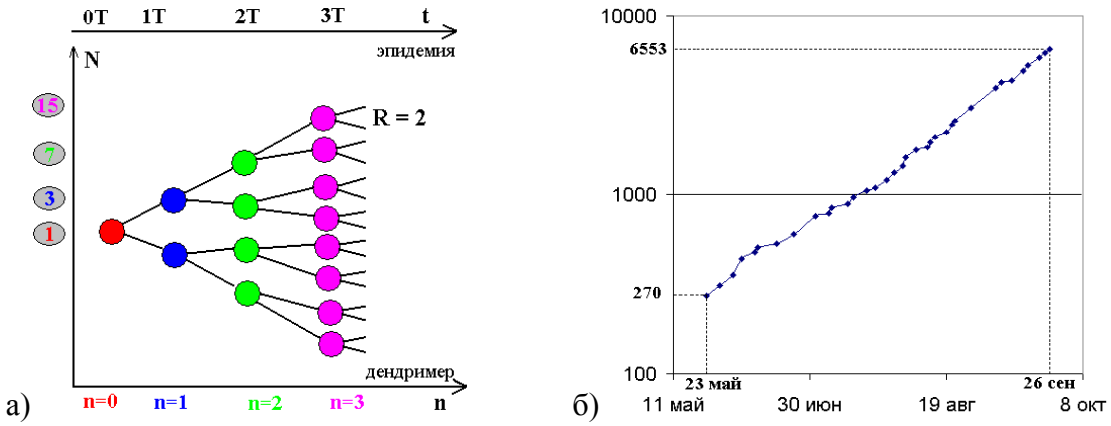

Рис. 1. а) Схематичное представление классической модели неограниченного роста для **R** = 2. б) Рост суммарного числа заболевших* от вируса Эбола в Гвинее, Либерии и Сьерра-Леоне за 126 дней (на основе данных ВОЗ).

Классическая модель неограниченного роста (рис. 1а) может быть использована для описания процессов роста разветвленной молекулы дендримера, роста популяции бактерий или распространения эпидемии. Основной параметр этой модели – коэффициент **R**, который показывает, во сколько раз число элементов в текущем поколении больше числа элементов в предыдущем поколении.

Рост дендримера		**Распространение эпидемии**	
элементы – узлы дендримера		элементы – заболевшие	
N(n)	зависимость суммарного числа узлов в молекуле дендримера от количества поколений **n**	**N(t)**	зависимость суммарного числа заболевших* от времени **t**, прошедшего от начала эпидемии
n	номер поколения	**n = t/T**	где **T** – среднее время между последовательными заражениями
R	количество ветвей, исходящих из узла дендримера	**R**	среднее число заразившихся от одного больного

*т.е. всех заболевших до времени **t**

1. *Выведите формулы **N(n)** и, соответственно, **N(t)**. (**3 балла**)*

2. *В каких координатах и при каком условии зависимость **N** от времени **t** линеаризуется? Чему будет примерно равен тангенс угла наклона полученной прямой? Поясните. (**3 балла**)*

3. *В случае эпидемии оценка коэффициента **R** позволяет делать прогнозы и определять эффективность принимаемых мер. Если удается снизить **R** < 1, то эпидемия идет на спад. На основании данных рис. 1б найдите **R** за рассмотренный промежуток времени, считая, что полученную зависимость **N(t)** можно использовать для описания непрерывного процесса эпидемии и **T** = 10,9 дня. (**3,5 балла**)*

4. *Считая **R** и **T** постоянными во времени, найдите дату начала эпидемии, а также к какой дате (если бы не были приняты меры по снижению **R**) суммарное количество больных могло бы достичь 1 000 000 человек. (**3,5 балла**)*

Ответ.

1. Общее число узлов дендримера равно сумме узлов во всех его поколениях: $N(n)=\sum_{0}^{n} M(i)$. Рассмотрим отдельные поколения:

M(0) = 1

M(1) = 1*R = R

M(3) = 1*R*R = R^2

…

M(**n**) = $\mathbf{R^n}$

Тогда $N(n)=\sum_{0}^{n} R^{i}=1+\sum_{1}^{n} R\cdot R^{i-1}=1+R\frac{R^{n}-1}{R-1}=\frac{R-1+R^{n+1}+R}{R-1}=\frac{R^{n+1}-1}{R-1}$ (по формуле суммы геометрической прогрессии).

Для эпидемии количество поколений будет **n = t/T**, следовательно, для **t** кратных **T** $N(t)=\frac{R^{\frac{t}{T}+1}-1}{R-1}$.

2. Полученная зависимость **N**(**t**) в общем случае не является линейной. Однако подсказкой служит почти линейный график на рис 1б в условии, который дан в полулогарифмических координатах. Поэтому, прологарифмируем полученную ранее зависимость **N**(**t**):

$$\lg(N(t))=\lg\left(\frac{R^{\frac{t}{T}+1}-1}{R-1}\right)=\lg\left(R^{\frac{t}{T}+1}-1\right)-\lg(R-1).$$

При $R^{\frac{t}{T}+1}>>1$ формулу можно упростить до

$$\lg(N(t))\cong\lg\left(R^{\frac{t}{T}+1}\right)-\lg(R-1)=\left(\frac{t}{T}+1\right)\lg R-\lg(R-1)=\frac{t}{T}\lg R+\lg\frac{R}{R-1}.$$

Т.е., спустя некоторое время после начала эпидемии, когда будет выполняться условие $R^{\frac{t}{T}+1}>>1$, в координатах **ln**(**N**) – **t** мы получим прямую с тангенсом угла наклона примерно равным $\frac{\lg R}{T}$.

3.

С одной стороны, коэффициент наклона графика на рисунке 1б равен $k = \frac{\lg R}{T}$, с другой стороны, его можно определить по графику как :

$k = \frac{\lg(N(t_2)) - \lg(N(t_1))}{t_2 - t_1} = \frac{\lg 6553 - \lg 270}{126} = 0{,}011$. То есть, $R = 10^{kT} = 10^{0{,}011 \cdot 10{,}9} = \mathbf{1{,}32}$.

4. Выразим время из зависимости $N(t) = \frac{R^{\frac{t}{T}+1} - 1}{R - 1}$:

$$t = \left(\frac{\lg(N(R-1)+1)}{\lg R} - 1 \right) T$$

Начало эпидемии.

$t_1 = \left(\frac{\lg(270(1{,}32-1)+1)}{\lg 1{,}32} - 1 \right) 10{,}9 = 164{,}6 \cong 165$, что отвечает началу эпидемии **9 декабря 2013**,

или (опираясь на конец графика) $t_2 = \left(\frac{\lg(6553(1{,}32-1)+1)}{\lg 1{,}32} - 1 \right) 10{,}9 = 289{,}39 \cong 289$, что соответствует расчетной дате начала эпидемии **11 декабря 2013**. Примечательно, что первый зафиксированный случай заражения действительно случился в начале декабря 2013 года.

1 000 000 заболевших без принятия мер.

<u>Вариант 1.</u> $t = \left(\frac{\lg(1000000(1{,}32-1)+1)}{\lg 1{,}32} - 1 \right) 10{,}9 \cong 487$

Это отвечает **10 апреля 2015** или **12 апреля 2015**, в зависимости от того, по какой из точек, первой или второй, мы рассчитываем начало эпидемии.

<u>Вариант 2.</u> В логарифмических координатах зависимость можно в общем виде записать как: **lg(N) = kt + b**. Ранее мы нашли, что $k = 0{,}011$. Тогда $b = \lg(N(t_1)) - kt_1 = \lg 270 - 0{,}011 \cdot t_1$ и $\lg(N(t)) = 0{,}011t + \lg 270 - 0{,}011 \cdot t_1$.

Подставив **N =** 1000000, находим $t = t_1 + \frac{\lg 1000000 - \lg 270}{0{,}011} \cong t_1 + 325$ (**13 апреля 2015**)

Примечание: формулу **lg(N) = kt + b** <u>нельзя</u> использовать для вывода $\mathbf{t_0}$, поскольку она справедлива только при условии $R^{\frac{t}{T}+1} >> 1$, не выполняющимся в начале эпидемии.