

Сокровища горного тролля (9 баллов)

Как-то раз друзья подшутили над горным троллем и смешали все его богатства. Надо сказать, что тролль был небольшим, потому и сокровища у него были соответствующие. Размеры всех драгоценных камней и слитков благородных металлов были дотошно перечислены в амбарной книге горного тролля, поэтому он не долго горевал, а быстро догадался, как рассортировать свое добро заново.

Амбарная книга горного тролля		
	плотность, г/см ³	диаметр, нм
алмазы	3,5	100, 1000, 5000
изумруды	2,7	100, 1000, 5000
золото	19,5	100, 1000, 5000

Достал тролль из своих кладовых прозрачный цилиндр, наполнил его чистой водой из горного ручья и стал брать из кучи драгоценности поштучно, начиная с самых крупных. Он аккуратно бросал их в цилиндр, чтобы, как древний Архимед, определить объем. Не тут-то было: не капает вытесненная вода из носика заполненного до краев цилиндра... Однако наш тролль оказался находчивым - засыпал все свои сокровища в цилиндр, достал хронометр, и дело у него пошло на лад.

1. Почему горный тролль не смог воспользоваться законом Архимеда? (2 балла)

2. Какой способ разделения драгоценностей в итоге выбрал тролль? Подробно опишите его принцип. (2 балла)

3. Какие драгоценности горный тролль отделит быстрее всего, а какие – медленнее всего? Запишите в общем виде формулу для времени выделения отдельных сокровищ. Все ли драгоценности удастся разделить за сутки? (3,5 балла)

4. Будь у горного тролля современная лаборатория, каким прибором вы бы посоветовали ему воспользоваться, чтобы ускорить процесс разделения богатств при помощи им выбранного способа? Ответ поясните. (1,5 балла)

Вязкость воды $8,94 \cdot 10^{-4}$ Па·с, плотность 1 г/см^3 , высота стакана 1 см. Все драгоценности считать идеально смачиваемыми шариками.

Ответ.

1. Поскольку все драгоценности идеально смачиваемы, то они будут тонуть, а не плавать на поверхности воды, как писали некоторые участники. В тоже время, драгоценности тролля малы, поэтому объем вытесняемой ими воды тоже мал. Такие маленькие капли не могут оторваться из-за силы поверхностного натяжения (см. школьный опыт с бросанием скрепок в полный стакан воды).

2. Горный тролль решил воспользоваться методом седиментации. Этот метод основан на разделении частиц разного размера и плотности по скорости их осаждения из водной суспензии. На частицу в воде действуют три силы – сила тяжести и направленные в противоположную сторону сила Архимеда и сила вязкого трения (сила Стокса): $mg = \rho_{\text{H}_2\text{O}}gV + 6\pi\eta v$. Когда силы уравновешивают друг друга, частица движется с постоянной скоростью. В рамках данной задачи считаем, что равновесие наступает быстро.

3. Чем крупнее драгоценности и чем больше их плотность, тем быстрее они осаждаются на дно стакана, и наоборот.

Найдем скорость движения частиц:

$$\rho_{\text{â-ââ}} \frac{4}{3} \pi r^3 g = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g \frac{4}{3} \pi r^3 + 6\pi\eta v, \quad 6\pi\eta v = \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho_{\text{â-ââ}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}), \quad v = \frac{2}{9} r^2 \frac{g(\rho_{\text{â-ââ}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}})}{\eta}.$$

Время полного осаждения – это время, необходимое для осаждения частицы с высоты

всего столба жидкости: $t = h/v = \frac{4,5h\eta}{r^2 g (\rho_{\text{â-ââ}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}})} = \frac{18h\eta}{d^2 g (\rho_{\text{â-ââ}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}})}$.

Драгоценность	диаметр d , нм	плотность ρ , г/см ³	t , с	t , сутки
алмазы	100	3,5	656816	7,6
	1000	3,5	6568	< 1
	5000	3,5	263	< 1
изумруды	100	2,7	965906	11,2
	1000	2,7	9659	< 1
	5000	2,7	386	< 1
золото	100	19,5	88759	1,03
	1000	19,5	888	< 1
	5000	19,5	35,5	< 1

За сутки полностью осядут только частицы с размером 1 и 5 мкм.

4. Если бы у тролля была возможность попасть в лабораторию, то ему для разделения не осевших за сутки сокровищ понадобилась бы ультрацентрифуга. При больших скоростях вращения центрифуги осаждение происходит под действием центробежной силы, многократно превышающей силу тяжести.