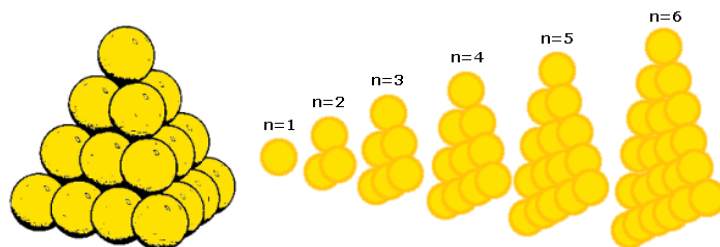


5. Золотая пирамида (5 баллов)



Атомы золота могут образовывать кластеры в форме правильного тетраэдра. Такой кластер можно рассматривать как n треугольных слоев, уложенных в стопку друг на друга.

1. Выведите формулу $M(n)$, связывающую количество атомов золота в слое с номером слоя. (1,5 балла) Выведите формулу $N(n)$, связывающую суммарное количество атомов золота в кластере с количеством слоев. (1,5 балла)

2. Рассчитайте количество атомов в таком кластере, если радиус описанной вокруг него окружности примерно равен 3,5 нм. (2 балла)

Радиус атомов золота принять равным $r = 0,144$ нм.

Ответ:

1. Тетраэдрический кластер с длиной ребра n атомов золота можно рассматривать как совокупность n треугольных слоев с общим числом атомов $N(n) = \sum_{m=1}^n M(m)$, где $M(m)$ – число атомов в слое с номером m .

Для вывода зависимости $M(m)$ запишем число атомов в нескольких первых слоях:

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 1 + 2 = 3$$

$$M(3) = 1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$M(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4 = 10$$

...

Как можно видеть, число атомов в слое с номером m представляет собой сумму простейшей арифметической прогрессии:

$$M(m) = M(m-1) + m = \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

Тогда число атомов в кластере в зависимости от числа слоев как:

$$N(n) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m k = \sum_{m=1}^n \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (m^2 + m) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n m^2 + \sum_{m=1}^n m \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$N(n) = \frac{1}{12} (n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)) = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 3n^2 + 3n}{12} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

2. Радиус описанной вокруг тетраэдрического кластера сферы равен $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a + r$, где $a = 2r(n-1)$ - длина ребра тетраэдра, вершины которого совпадают с центрами атомов, лежащих в вершинах кластера. То есть, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}(n-1)r + r$ и $n = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{R}{r} - 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$$n = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{3,5}{0,144} - 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 20,03 \approx 20.$$

Тогда в искомом кластере $N(20) = \frac{20^3 + 3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20}{6} = 1540$ атомов золота.