Задача 8.

Выпуклые многогранники (7 баллов)

1. (1,5 балла) Общее число граней: $\mathbf{Г} = \mathbf{Г_3} + \mathbf{Г_4} + \mathbf{Г_5} + \mathbf{Г_6} + \mathbf{Г_7} + \mathbf{Г_8} + \ldots$

Общее число рёбер: $\mathbf{Р} = ½*(3\mathbf{Г_3} + 4\mathbf{Г_4} + 5\mathbf{Г_5} + 6\mathbf{Г_6} + 7\mathbf{Г_7} + 8\mathbf{Г_8} + \ldots)$

Общее число вершин: $\mathbf{В} = 1/3*(3\mathbf{Г_3} + 4\mathbf{Г_4} + 5\mathbf{Г_5} + 6\mathbf{Г_6} + 7\mathbf{Г_7} + 8\mathbf{Г_8} + \ldots)$

Тогда, подставляя в теорему Эйлера, получаем:

$1/3*(3\mathbf{Г_3} + 4\mathbf{Г_4} + 5\mathbf{Г_5} + 6\mathbf{Г_6} + 7\mathbf{Г_7} + 8\mathbf{Г_8} + \ldots) - ½*(3\mathbf{Г_3} + 4\mathbf{Г_4} + 5\mathbf{Г_5} + 6\mathbf{Г_6} + 7\mathbf{Г_7} + 8\mathbf{Г_8} + \ldots) + \mathbf{Г_3} + \mathbf{Г_4} + \mathbf{Г_5} + \mathbf{Г_6} + \mathbf{Г_7} + \mathbf{Г_8} + \ldots = 2$

Общее уравнение, связывающее число граней разного типа:

$3\mathbf{Г_3} + 2\mathbf{Г_4} + \mathbf{Г_5} = 12 + \mathbf{Г_7} + 2\mathbf{Г_8} + \ldots + (n - 6)\mathbf{Г_n}$

2. (1,5 балла) Число шести-, семи-, восьмиугольных граней может быть произвольным, но не существует выпуклых многогранников, составленных только из этих многоугольников, обязательно должны присутствовать и/или треугольные, и/или четырёх угольные, и/или пятиугольные грани (уравнение $n/3*\mathbf{Г_n} – n/2*\mathbf{Г_n} + \mathbf{Г_n} = 2$ или $(n - 6)\boldsymbol{Г_n} = 12$ не имеет целочисленного решения при $n \geq 6$).

Для $\mathbf{n} = 3$ находим: $\mathbf{Г_3} = 12/3 = 4$ треугольных грани – тетраэдр (рис. 1а);

$\mathbf{n} = 4$ находим: $\mathbf{Г_4} = 12/2 = 6$ четырёхугольных граней – куб (рис. 1б);

$\mathbf{n} = 5$ находим: $\mathbf{Г_5} = 12/1 = 12$ пятиугольных граней – додекаэдр (рис 1в).

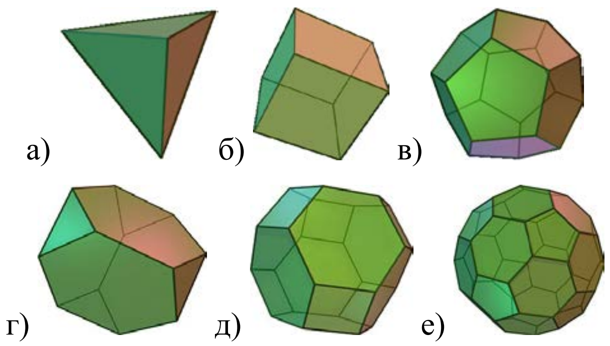

Рис. 1. Платоновы тела: а) тетраэдр, б) куб, в) додекаэдр.
Архимедовы тела: г) усеченный тетраэдр, д) усеченный октаэдр, е) усеченный икосаэдр.

3. (2,5 балла) а) Преобразуем тетраэдр: минимально возможно 4*3 = 12 изолированных вершин; итоговый многогранник - <u>усеченный тетраэдр (рис. 1г)</u>, то есть, 4 треугольных и (12*3 – 3*4)/6 = 4 шестиугольных грани.

б) Преобразуем куб: минимально возможно 6*4 = 24 изолированных вершины; итоговый многогранник - <u>усеченный октаэдр (рис. 1д)</u>, то есть, 6 квадратных и (24*3 – 4*6)/6 = 8 шестиугольных граней.

в) Преобразуем додекаэдр: минимально возможно 12*5 = 60 изолированных вершин; итоговый многогранник - <u>усеченный икосаэдр (рис. 2е)</u>, то есть, 12 пятиугольных и (60*3 – 12*5) = 20 шестиугольных граней.

Многогранники, составленные не менее чем из двух видов правильных многоугольников, называются Архимедовыми телами (Архимедовыми многогранниками).

4. (1,5 балла) В наномире наиболее часто встречается усеченный икосаэдр – это фуллерен C_{60}. Усеченные тетраэдр и октаэдр могут встретиться, например, среди ячеек каркасных структур или среди кластеров.