Задача 7.

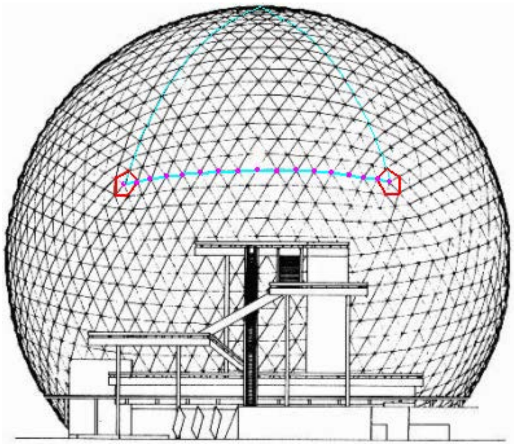
Главный Бакминстер Фуллерен (8 баллов)

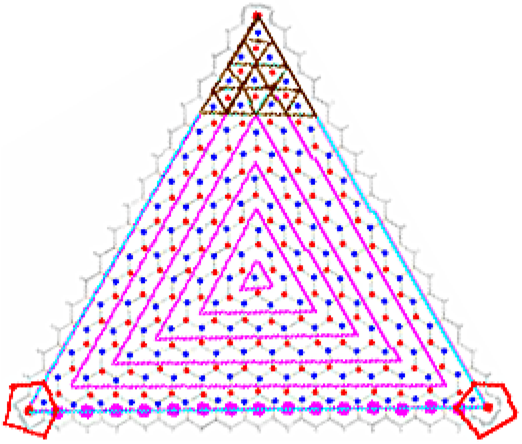
1. (2 балла) Главные конструкционные элементы данного геодезического купола – тетраэдры. Их вершины, обращенные внутрь сферы, скреплены ребрами жесткости, которые и образуют ребра «фуллерена».

Стоит отметить, что Фуллер считал тетраэдр одной из основных конструкционных единиц, и развил из этой предпосылки математический подход, позволяющий получать наиболее эффективные с точки зрения прочности и эргономичности конструкторские решения. Таким образом, построить купол из пяти- и шестиугольников не было главной целью архитектора, но эти многоугольники неизбежно присутствовали в структуре купола, что при удачном освещении и помогло ученым открыть структуру нового вида молекул.

2. (4 балла) Фуллерен, получаемый при дополнении геодезического купола до сферы, имеет симметрию икосаэдра (по Рис. 2 видно, что расстояния между всеми «пятиугольниками» равны, проекции «граней» имеют вид правильных треугольников).

По Рис.1 определить размер фуллерена сложно, поскольку в этом ракурсе виден лишь один «пятиугольник». Однако, это легко сделать, зная устройство купола и имея его чертеж. Как можно видеть из Рис. 2а, вершины треугольников внешнего слоя сходятся над центрами граней «фуллерена», в свою очередь, каждому «атому» – узлу в «фуллереновой» решетке – отвечает один треугольник внешней поверхности геодезического купола.


а)


б)

а) На чертеже купола выделены вершины, в которых сходятся по 5 треугольников, и одна из 20 граней икосаэдра. б) Выделенная грань икосаэдра: расположение гексагональной решетки относительно внешних треугольников.

Согласно схеме, между двумя центрами «пятиугольников» находится 16 сторон внешних треугольников (ребер отвечающих им тетраэдров). Это соответствует 16-му фуллерену икосаэдрического ряда $20*n^2$, т.е. $\mathbf{C_{5120}}$.

Другой подход – построить одну грань внешней икосаэдрической поверхности купола (см. рисунок) и посчитать, что на этой грани 256 узлов-«атомов» (2^8, сумма последовательности $\sum_{n=0}^{15}(2n+1)$), а общее их количество тогда составляет 20*256=**5120**.

Поскольку на один «атом» «фуллерена» приходится один треугольник поверхности, а, следовательно, один тетраэдр купола, то геодезический купол Фуллера состоит из 2/3*5120 ≈ **3413** тетраэдров.

Как следствие из теоремы Эйлера для многогранников, состоящих из пяти- и шестиугольников, число атомов в фуллерене составляет **n** = 20 + 2$\mathbf{N_6}$. Тогда количество шестиугольников составляет **2550** (количество пятиугольников всегда **12**).

Проверяя решения участников, авторы с удивлением обнаружили, что у Бакминстера Фуллера было 2 похожих чертежа купола, в каждом из которых ребро икосаэдра проходит по 16 треугольникам. Только в Монреальском куполе ребро проходит по ребрам внешних треугольников, а в более ранней версии чертежа (рис. 2б в условии) – по их высотам. Решения, в которых расчет велся по этому чертежу (**192** треугольника на грани и **3840** атомов, соответствует 8-му фуллерену икосаэдрического ряда 60*n^2) засчитывались как верные.

3. (2 балла) Приравняем площадь поверхности фуллерена к площади описанной сферы: $S = 4\pi R^2$

Исходя из элементарной геометрии, площадь одного правильного шестиугольника $3\sqrt{3}a^2/2$, тогда, пренебрегая площадью пятиугольников, получаем $4\pi R^2 = N_6 \cdot 1{,}5\sqrt{3}a^2$, откуда

$$a = 2R\sqrt{\pi/\left(1{,}5\sqrt{3}N_6\right)} = 70\sqrt{\pi/\left(1{,}5\sqrt{3}\cdot 2550\right)} = 1{,}5 \text{ м}.$$

Тогда «модель» в $1{,}5(м)/0{,}142\cdot 10^{-9}\ (м) = 1{,}06\cdot 10^{10}$ раз больше реальной молекулы.