

Раскраски бакибола

Художник-футурист изготовил пространственную модель молекулы фуллерена C_{60} и покрасил 12 пятиугольных граней в красный цвет, а 20 шестиугольных граней — в зелёный цвет. Каждый день художник выбирает произвольную грань, после чего перекрашивает в противоположный цвет соседние с ней (по ребру) грани (красные грани становятся зелёными, а зелёные — красными).

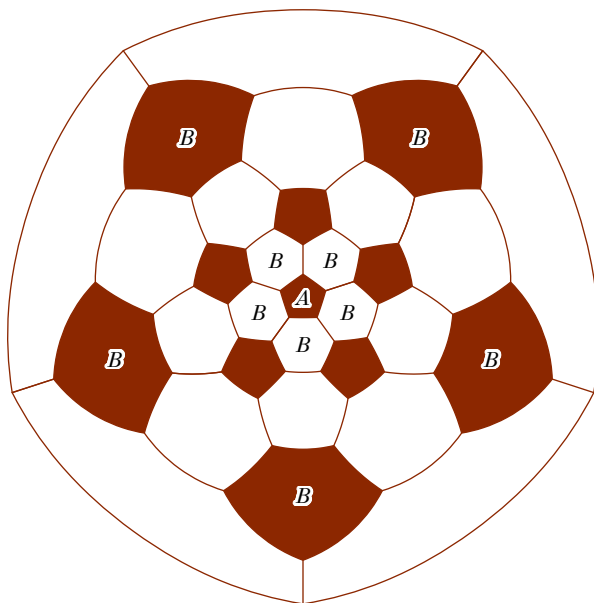
(а, 1 балл) Художник хочет, чтобы модель молекулы фуллерена стала полностью красной. Придумайте, как ему нужно действовать.

(б, 3 балла) Какое наименьшее количество дней ему для этого понадобится? Приведите пример его действий и покажите, что за меньшее количество дней покрасить в красный цвет модель не удастся.

(в, 1 балл) А получится ли у него сделать модель полностью зелёной?

а, б) **Ответ:** 12 дней. Если художник последовательно выберет каждый из 12 красных пятиугольников и поменяет цвет соседей, то каждый шестиугольник поменяет цвет трижды, и в итоге через 12 дней фуллерен станет полностью красным.

Докажем теперь, что 12 — минимальное количество дней. Если это не так, то ученый не перекрашивал соседей одного из красных пятиугольников. Обозначим этот пятиугольник буквой A , противоположный — A' , и отметим буквой B все шестиугольники, который граничат с A . Отметим также буквой B все пятиугольники, которые ближе к A' , чем к A , но не совпадают с A' . Заметим теперь, что при выборе любой из граней, кроме A , чётность числа красных клеток среди отмеченных буквой B на рисунке, не меняется (это лучше всего видно на проекции Шлегеля — см. рисунок). Значит, не выбирая A , художник не может добиться даже того, чтобы все клетки B стали красными. Противоречие.



в) **Ответ:** да, может. Для этого достаточно сначала сделать фуллерен полностью красным (см. п. а)). Затем последовательно выбрать каждый шестиугольник; при этом каждый пятиугольник поменяет цвет пять раз, а каждый шестиугольник — три раза. В итоге фуллерен станет полностью зелёным. Для этого потребуется 32 дня.