

Хлорографен

Наноробот работает на треугольном участке графена со стороной $n\sqrt{3}a_{C-C}$, где a_{C-C} — расстояние между соседними атомами углерода (на рисунке схематически изображены такие участки для $n = 3$ и $n = 9$).

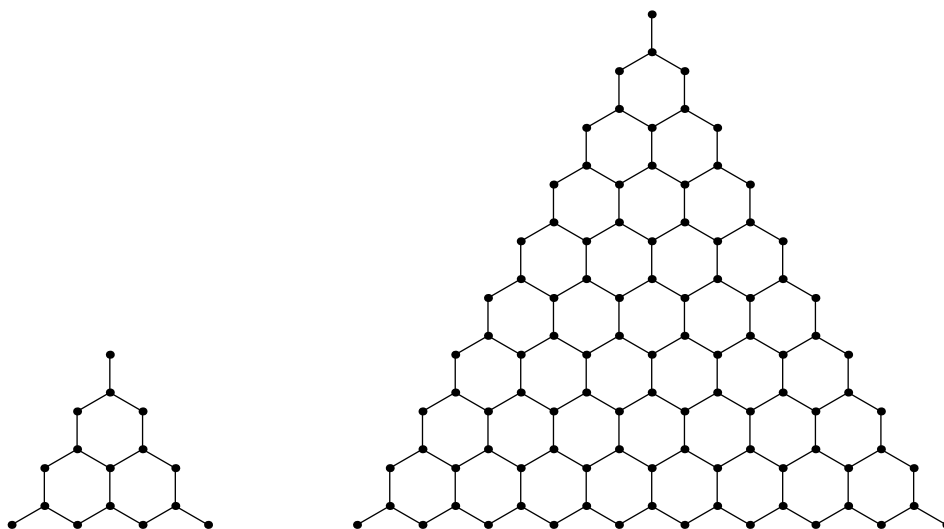
(а, 1 балл) Сколько атомов углерода в таком куске графена?

Каждую секунду наноробот прикрепляет к атому углерода атом хлора, а затем переходит к соседнему (по ребру решетки) атому углерода. Наноробот никогда не возвращается к атому углерода, к которому он уже прикрепил атом хлора. Если все соседние атомы углерода уже соединены с хлором, наноробот останавливается.

(б, 1 балл) Пусть $n = 3$ (см. рис. слева). Какое максимальное количество атомов хлора может прикрепить к графену наноробот? (приведите пример действий наноробота, при которых получится такое количество атомов хлора, и докажите, что больше их быть не может).

(в, 3 балла) Решите аналогичную задачу для $n = 9$ (см. рис. справа).

(г, 2 балла) Обобщите рассуждение из предыдущего пункта, и решите задачу для произвольного n .



Решение. а) В первом ряду такого куска графена 1 атом, во втором — 3, и т. д., в каждом следующем на два атома больше, чем в предыдущем. Значит, количество атомов в куске со стороной n равно

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \frac{2(n + 1) \cdot (n + 1)}{2} = (n + 1)^2.$$

б–г) Чтобы присоединить хлор к $(n + 1)^2 - n = n^2 + n + 1$ атомам углерода (то есть к 13 атомам для треугольника со стороной 3 и к 91 атомам для треугольника со стороной 9), достаточно идти «змейкой»: сначала пройти весь нижний слой кроме самого правого атома, потом — следующий кроме самого левого и т. д. Докажем, что больше атомов хлора присоединить нельзя.

Будем считать, что наноробот присоединяет атом хлора сверху от плоскости графена для атомов, отмеченных черным, и снизу — для остальных атомов. Тогда ему придется каждый второй раз присоединять атом хлора сверху. Но незакрашенных атомов всего $1 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, поэтому путь наноробота не длиннее $1 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 + n + n^2$, что и требовалось доказать.

