

Задача: оптическое волокно.

Строгое решение:

При первом падении выполняется закон преломления

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n_0$$

Далее, ввиду неоднородности среды луч будет отклоняться от прямолинейного распространения так, как показано на рисунке. Если мысленно разбить волокно на множество тонких слоев, внутри которых показатель преломления можно считать постоянным, и воспользоваться

законом преломления, то получим: $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\sin(\gamma_1)} = \frac{n_1}{n_0} \Rightarrow \cos(\beta) n_0 = \sin(\gamma(x)) n(x)$. Касательная к траектории луча — это тангенс угла наклона к оси **OX**. Этот угол — есть угол преломления луча в точке с координатами (X, Y) . Таким образом:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\gamma(x))$$

Выполнив, ряд преобразований приходим к дифференциальному уравнению:

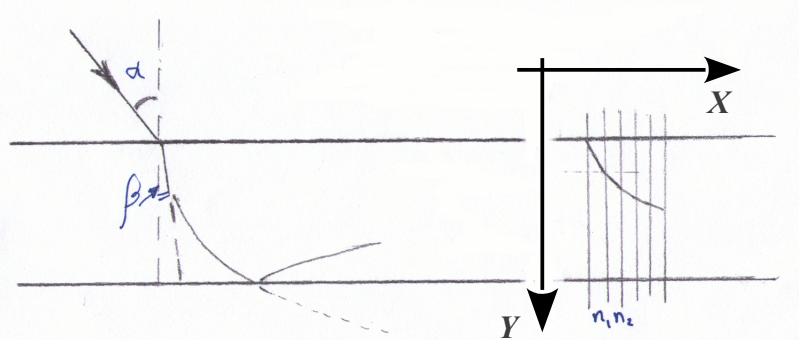
$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{(n_0 + kx)^2}{n_0^2 \cos^2(\beta)} - 1}}, \text{ принимая во внимание начальные условия (при } x=0, y=0),$$

интегрируем почленно. Интеграл сводится к табличному. Дальнейшие выкладки позволяют найти расстояние, которое пройдет луч вдоль оси **OX** до противоположной грани ($X_1 \approx 0,97$ см). Это даёт возможность определить показатель преломления в этой точке $n(X_1) = 1,79$ и угол полного внутреннего отражения на этом расстоянии $\beta_{\text{ПВО}} = \arcsin(0,56) \approx 34^\circ$.

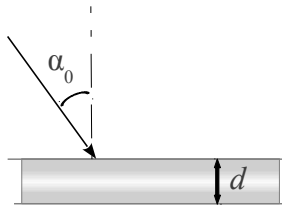
Рассчитав производную $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n_0 + kx)^2}{n_0^2 \cos^2(\beta)} - 1}}$ в точке с координатой X_1 , получаем

угол падения луча к нижней грани $\approx 52^\circ$, что превышает угол полного внутреннего отражения. Таким образом, луч *не выйдет* из волокна.

Ввиду сложности строгого аналитического решения, допускалось приближенное, не учитывающее искривление траектории (приводится ниже). Участники предпринявшие попытку строгого аналитического решения получали максимальную оценку **5 баллов**.



Приближенное решение.



Пренебрежем искривлением траектории луча внутри волокна, предполагая, что он распространяется прямолинейно. При первом падении выполняется закон преломления $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n_0$ (1 балл). Далее,

луч внутри распространяется прямолинейно, падает и отражается под углом β , а вышедший луч преломляется под все большим углом, пока не будет выполнено условие полного внутреннего отражения $\frac{1}{\sin(\beta)} = n(l_{max})$ (1 балл).

Отсюда длина отрезка, от точки падения, до точки последнего выхода луча l_{max} , определяется следующим образом: $l_{max} = \frac{n - n_0}{k} = \frac{n_0 - n_0 \cdot \sin(\alpha)}{k \cdot \sin(\alpha)}$. Учитывая, что расстояние на поверхности от одного попадания луча до другого на противоположной стороне $\Delta l = d \operatorname{tg}(\beta)$, получаем число раз, которое луч выйдет из волокна $N = \frac{n_0(1 - \sin(\alpha))}{k \sin(\alpha)} \cdot \frac{1}{d \operatorname{tg}(\beta)} \approx 1,7$ (3 балла), то есть луч в этом приближении выйдет 1 раз на противоположной стороне.