

МАТЕМАТИКА (школьники 7-11 классов)

С 10 января 2013 года начинается **ОТБОРОЧНЫЙ** тур для школьников 7-11 классов в рамках VII Интернет - олимпиады по нанотехнологиям, проводимой [МГУ им. М.В.Ломоносова](#) и [Фондом инфраструктурных и образовательных программ РОСНАНО](#). Решение задач отборочного тура **ОБЯЗАТЕЛЬНО** для прохождения на очный тур олимпиады, завершение тура - 30 января 2013 года (31 января весь день будут приниматься оставшиеся задания опоздавших, с 1 февраля утром начнется проверка и задания больше загружать будет нельзя).

Интернет - олимпиада по нанотехнологиям традиционно вошла в приказ министерства образования и науки о [перечне олимпиад на 2012 / 2013 учебный год](#) (номер 3 в перечне) по комплексу предметов "химия, физика, математика, биология" и будет давать существенные льготы при поступлении абитуриентов в ВУЗы. Призеры и победители будут награждены памятными призами. Сроки проведения Олимпиады для школьников, участвующих в испытаниях по комплексу предметов "химия, физика, математика, биология" (файлы с заданиями приведены ниже, прием решений будет открыт послезавтра):

- [Регистрация и перерегистрация участников](#): по 25 января 2013 года ([ИДЕТ](#))
- Отборочный тур: с 10 по 31 января 2013 г.
- Задания и возможность загрузки решений будут даны по классам в разделе "[Олимпиада](#)" (следует, по возможности, решать все задания), дополнительные баллы можно получить в результате участия в конкурсе идей (рефератов) проектных и творческих работ.

Призеры и победители отборочного тура будут объявлены на основании баллов, набранных при решении всех четырех предметов.

Октаграфен (2 балла) - 7 – 11 класс

Недавно было предсказано открытие новой аллотропной модификации углерода — октаграфена. У октаграфена атомы находятся в узлах сетки, образованной восьмиугольниками и квадратами. Длина рёбер квадрата — 1.48Å , длина остальных С-С связей — 1.35Å .

Рассмотрим две решётки одинаковой площади: одна обычного графена, а другая — октаграфена. Какая из них тяжелее и во сколько раз? Площадь считать достаточно большой, чтобы краевыми эффектами можно было пренебречь.

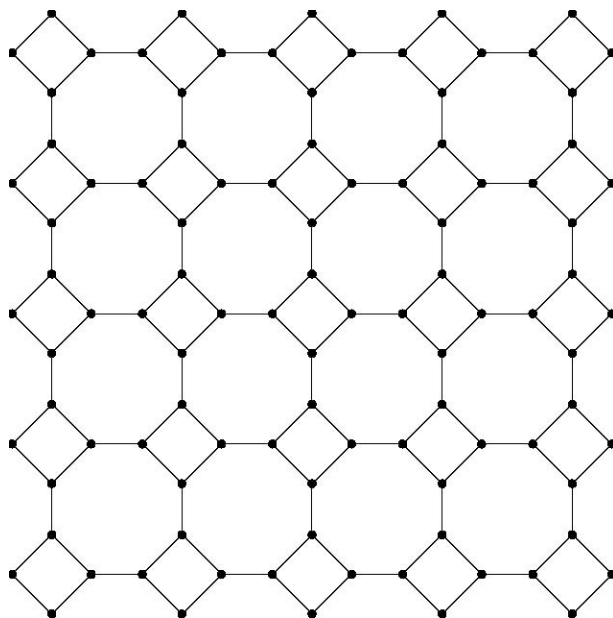


Рис. 1: Модель решётки октаграфена

Энергия фуллерена (6 баллов) – 7 – 9 класс

Напомним, что фуллерены — это молекулы C_n , причём атомы являются вершинами многогранника, все грани которого — пятиугольники и шестиугольники. Подробнее об устройстве фуллеренов можно узнать, решив задачу «Низшие фуллерены», или поискав информацию в сети Интернет.

В таблице представлены результаты вычислений суммарной энергии атомов фуллеренов с разным количеством атомов. Три правых колонки таблицы — полудиаметры молекулы фуллерена, измеренные в трех разных направлениях.

(а, **1 балл**) Авторы статьи предлагают считать «истинную» энергию, приходящуюся на один атом фуллерена, по формуле $E_{atom}^F = \frac{E_{total} - \delta E}{N - 60}$ (вместо естественной формулы $\frac{E_{total}}{N}$), чтобы исключить вклад пятиугольников. Здесь δE — суммарная энергия атомов фуллерена C_{60} . Вычислите «истинную» энергию, приходящуюся на один атом, в каждом фуллерене из этой таблицы.

(б, **3 балла**) Какая зависимость лучше всего описывает поведение E_{atom}^F при росте радиуса фуллерена: $E_{atom}^F = E_0 + Cr^{-1}$, $E_{atom}^F = E_0 + Cr^{-2}$, $E_{atom}^F = E_0 + Cr^{-3}$ (для некоторых значений E_0 и C)? Здесь r — радиус сферы, приближающей фуллерен.

(в, **2 балла**) Как найденное значение E_0 соотносится с энергией, приходящейся на один атом в плоском листе графена? Попробуйте объяснить полученное соотношение.

атомов (N)	E_{total} (эВ)	a-axis (°А)	b-axis (°А)	c-axis (°А)
60	-531.33	3.335	3.419	3.475
70	-622.58	3.465	3.542	3.973
76	-676.39	3.357	3.831	4.381
78	-693.86	3.576	3.679	4.298
80	-711.77	3.864	3.929	4.056
84	-748.46	3.277	4.250	4.791
100	-894.22	3.881	4.052	5.635
180	-1629.66	5.999	6.085	6.194
240	-2181.51	6.958	6.941	7.241
320	-2913.64	7.928	8.165	8.521
500	-4569.75	9.902	10.247	10.853
540	-4940.30	10.505	11.364	11.894

Дендримеры (5 баллов) 7 – 11 класс

Прочтите статью «Синтез и сравнительная характеристика фосфорсодержащих дендримеров с фенокси- или дейтерифенокси- терминальными терминальными группами (ссылка на скачивание статьи <http://www.chem.msu.su/rus/jvho/2008-1/100.pdf>, скопируйте ссылку и откройте ее в отдельном окне). В этой статье описан синтез дендримеров двух разных типов и приведены химические формулы, необходимые для решения этой задачи.

(а, **1 балл**) У синтезированного дендримера 96 терминальных (концевых) дейтерифенокси- групп (то есть C_6D_5O). Какой генерации этот дендример?

(б, **2 балла**) Какова его молекулярная масса?

(в, **2 балла**) Какая молекула тяжелее: молекула дендримера 5-й генерации с дейтерифенокси -группами или 6-й генерации с фенокси- группами (то есть C_6H_5O)?

Комментарий: D — это изотоп водорода; молярная масса этого изотопа равна 2.

Раскраски бакибола (5 баллов) – 7 – 9 класс

Художник-футурист изготовил пространственную модель молекулы фуллерена C_{60} и покрасил 12 пятиугольных граней в красный цвет, а 20 шестиугольных граней — в зелёный цвет. Каждый день художник выбирает произвольную грань, после чего перекрашивает в противоположный цвет соседние с ней (по ребру) грани (красные грани становятся зелёными, а зелёные — красными).

(а, **1 балл**) Художник хочет, чтобы модель молекулы фуллерена стала полностью красной. Придумайте, как ему нужно действовать.

(б, **3 балла**) Какое наименьшее количество дней ему для этого понадобится? Приведите пример его действий и покажите, что за меньшее количество дней покрасить в красный цвет модель не удастся.

(в, **1 балл**) А получится ли у него сделать модель полностью зелёной?

Хлорографен (7 баллов) - 7 – 11 класс

Наноробот работает на треугольном участке графена со стороной $n\sqrt{3}a_{c-c}$, где a_{c-c} — расстояние между соседними атомами углерода (на рисунке схематически изображены такие участки для $n=3$ и $n=9$).

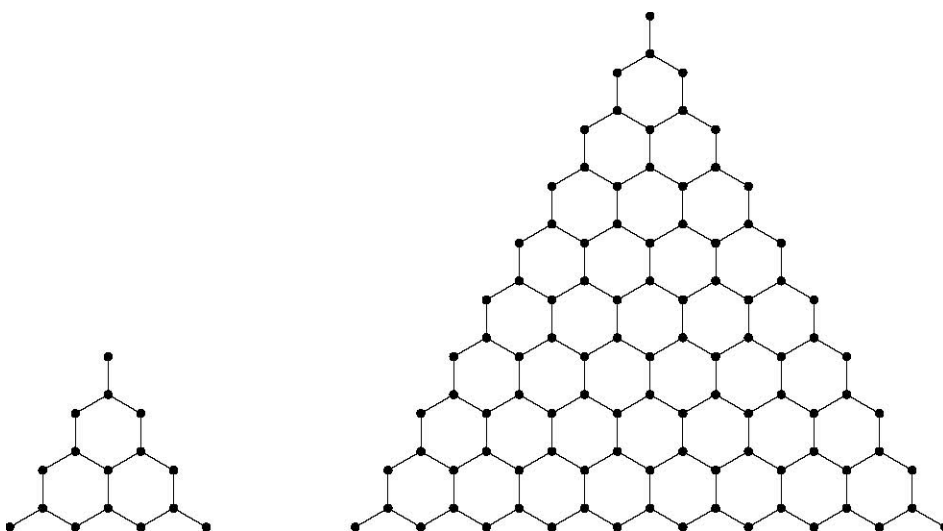
(а, **1 балл**) Сколько атомов углерода в таком куске графена?

Каждую секунду наноробот прикрепляет к атому углерода атом хлора, а затем переходит к соседнему (по ребру решетки) атому углерода. Наноробот никогда не возвращается к атому углерода, к которому он уже прикрепил атом хлора. Если все соседние атомы углерода уже соединены с хлором, наноробот останавливается.

(б, **1 балл**) Пусть $n=3$ (см. рис. слева). Какое максимальное количество атомов хлора может прикрепить к графену наноробот? (приведите пример действий наноробота, при которых получится такое количество атомов хлора, и докажите, что больше их быть не может).

(в, **3 балла**) Решите аналогичную задачу для $n=9$ (см. рис. справа).

(г, **2 балла**) Обобщите рассуждение из предыдущего пункта, и решите задачу для произвольного n .



Главный Бакминстер Фуллерен (8 баллов) – 7 – 9 класс

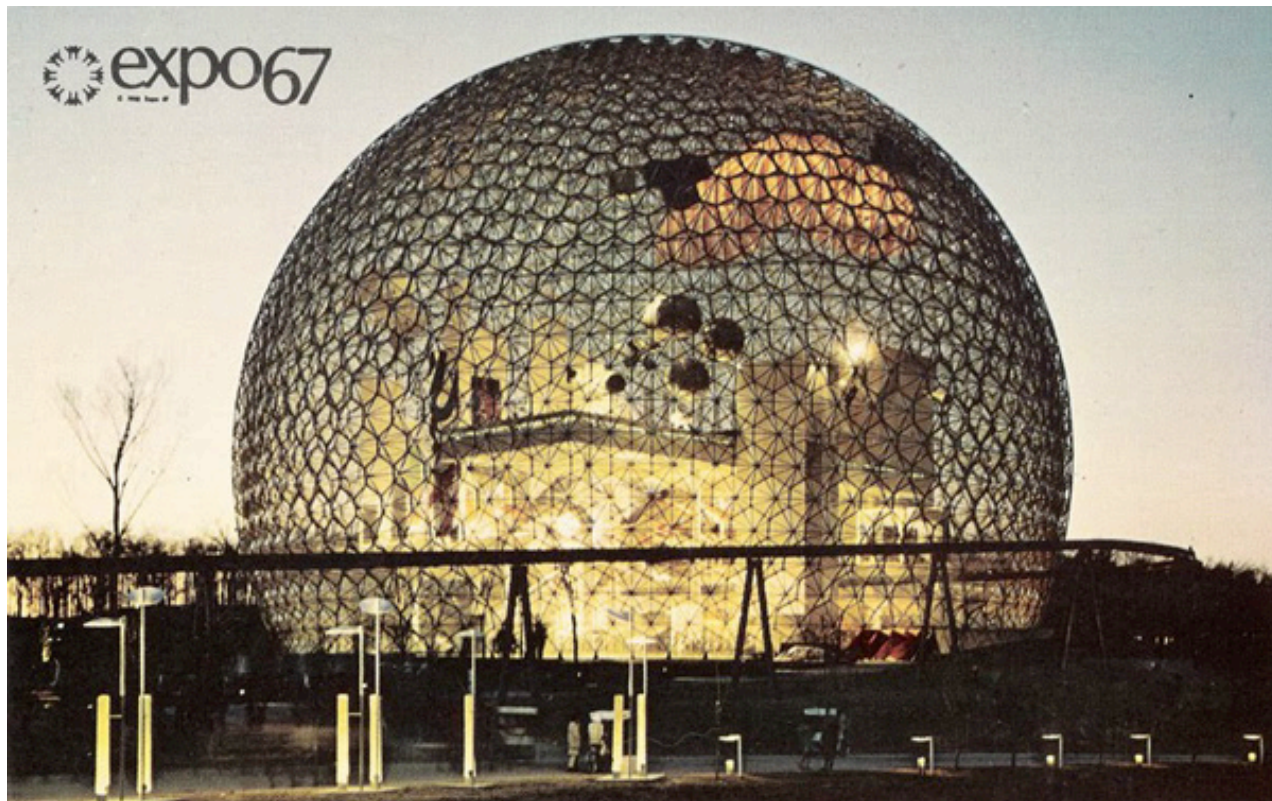


Рис. 1. Подсвеченный изнутри геодезический купол, спроектированный Ричардом Бакминстером Фуллером для Всемирной выставки Экспо-67 в Монреале, подсказал ученым принцип построения молекул фуллеренов, которые и были названы в честь выдающегося архитектора.

Одна из визитных карточек нанотехнологий – фуллерены, каркасные углеродные молекулы, состоящие из сопряженных пяти- и шестиугольников. Считается, что у них много общего с геодезическими куполами (Рис. 1), однако, на самом деле, в основе куполов Фуллера лежит совершенно иной конструкционный подход (см. Рис. 2 – в конце задачи).

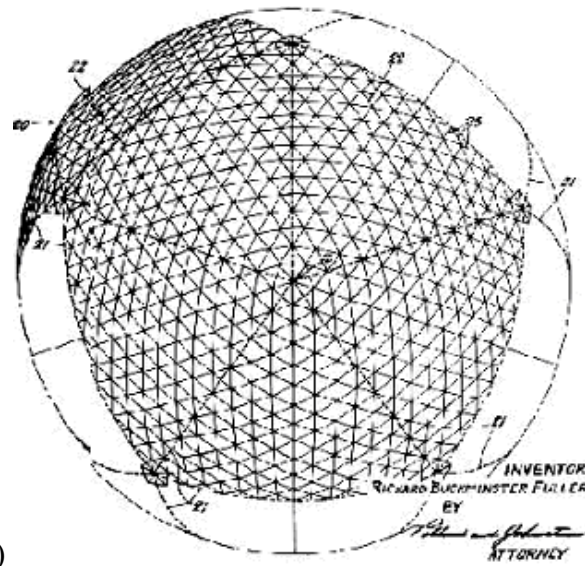
1. Какие именно правильные геометрические фигуры составляют конструкционную основу купола? Какую роль при этом выполняют ребра «фуллерена», которые мы можем видеть на Рисунке 1? (2 балла)

2. Исходя из приведенных в задаче рисунков, рассчитайте формулу Главного Бакминстер Фуллерена, соответствующего силуэту купола, представленного на Рисунке 1. Сколько пяти- и шестиугольников он содержит? Также оцените количество геометрических фигур, составляющих конструкционную основу купола, если размер купола – это примерно $\frac{2}{3}$ от сферы. (4 балла)

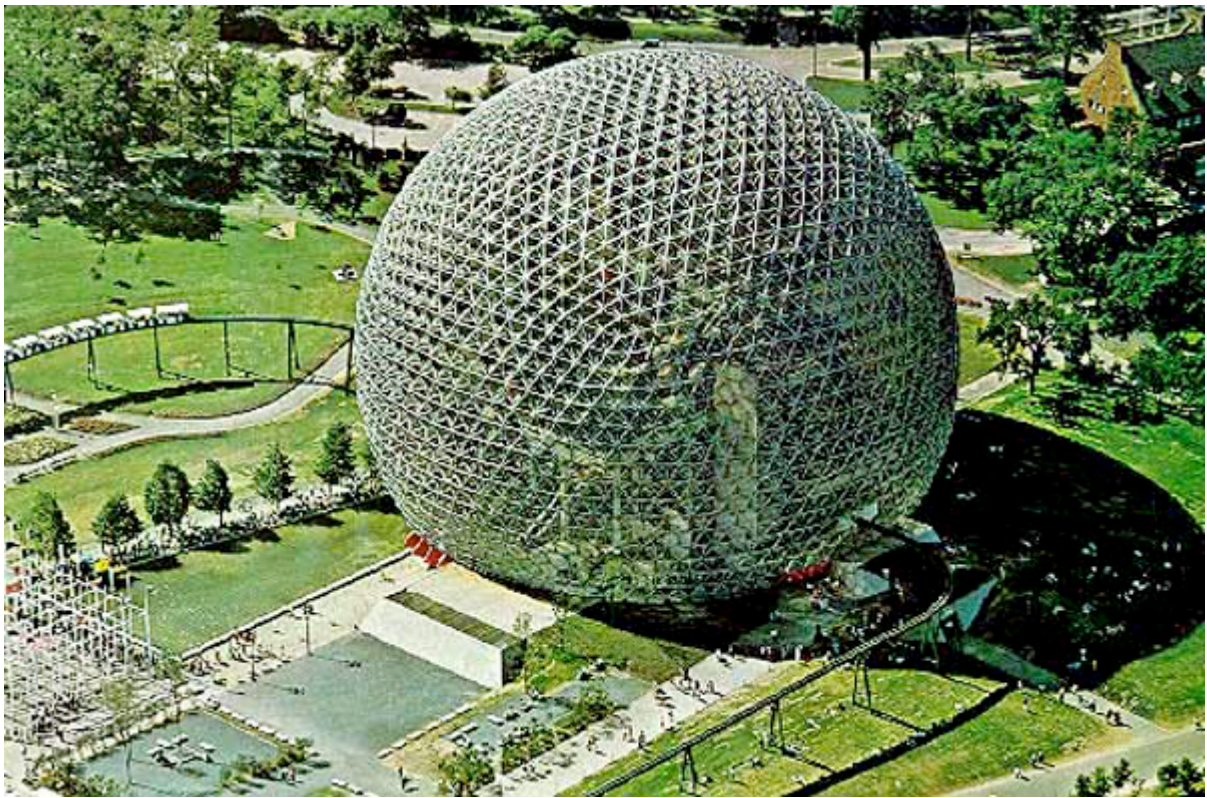
3. Оцените размер ребра купольной «модели» Главного Бакминстер Фуллерена, если внутренний диаметр купола составляет примерно 70 метров. Во сколько раз купольная модель больше молекулы Главного Бакминстер Фуллерена? Длину С-С связи считать равной 0,142 нм. (2 балла).



a)



b)



B)

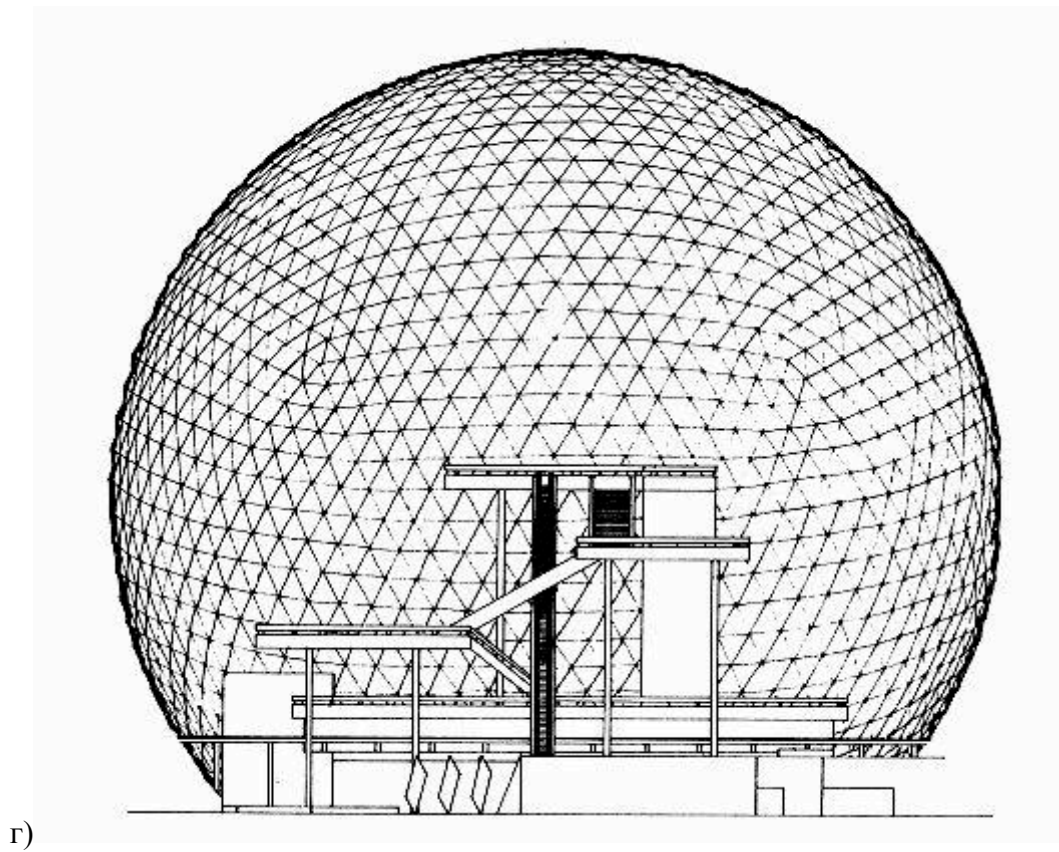


Рис. 2. Вспомогательные рисунки для решения задачи, геодезический купол в Монреале. а) Крупный план строения стенки купола. б) Авторский чертеж купола. в) Фото без подсветки. г) Схематичное изображение купола, вид сбоку.

Выпуклые многогранники (7 баллов) – 7 – 9 класс

Для любого выпуклого многогранника справедлива теорема Эйлера: $V - P + G = 2$

где V , P , G – это , соответственно, число вершин, рёбер и граней многогранника. Рассмотрим далее многогранники, в каждой вершине которых сходятся три ребра. Пусть такой многогранник содержит G_3 треугольных, G_4 четырёхугольных, G_5 пятиугольных, G_6 шестиугольных, G_7 семиугольных, G_8 восьмиугольных, ..., G_n n -угольных граней и все многоугольники являются правильными.

1. Чему равно число вершин и число ребер в таком многограннике? Запишите формулу Эйлера для данного многогранника через $G_3, G_4, G_5, G_6, \dots, G_n$. (1,5 балла)

2. Для каких n существуют многогранники, у которых все грани - n -угольники? Найдите количества граней в таких многогранниках. Как они будут называться? (1,5 балла)

3. «Раздвинем» в пространстве n -угольники в многогранниках из предыдущего пункта и построим новые многогранники, в которых «раздвинутые» n -угольники будут гранями, не имеющими общих вершин. Какое минимальное число вершин должно быть в новых многогранниках? Какие грани будут разделять исходные многоугольники? Назовите полученные многогранники – каждый в отдельности и общее название класса. (2,5 балла)

4. Можно ли полученные в п.3 многогранники встретить в наномире, и если – да, то где? (1,5 балла)

Математика кластеров (11 баллов) – 10 – 11 класс

Икосаэдрическая симметрия часто встречается в наномире. Упаковка атомов в наноклстерах с такой симметрией является одной из самых термодинамически стабильных. В простейшем случае это 13 одинаковых атомов, один из которых располагается в центре, а остальные 12 – в вершинах правильного икосаэдра. Если принять построение икосаэдра за основу, то при последовательном наращивании слоёв (рис. 1а) можно получить ряд икосаэдрических структур (см. рис. 1б).

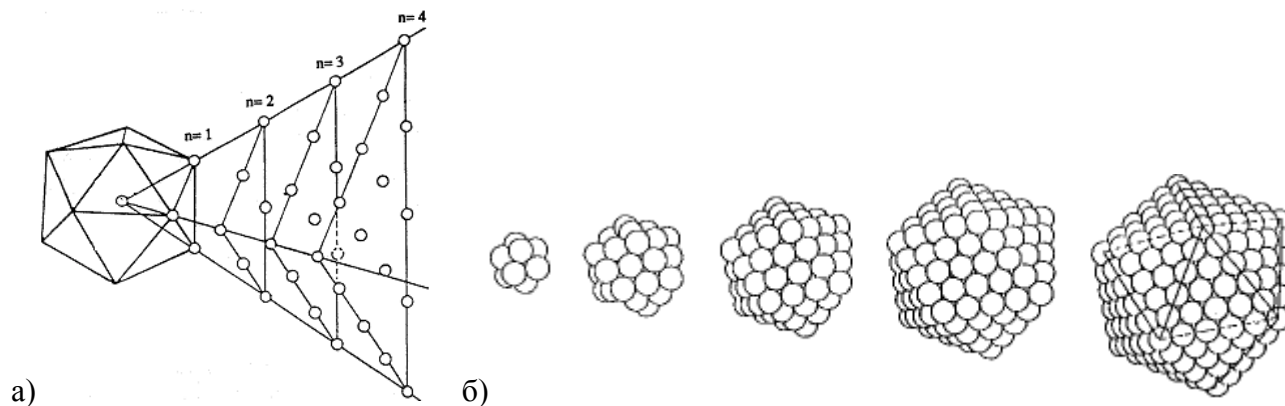


Рис. 1. Принцип послойного формирования простейших икосаэдрических кластеров: а) зависимость вида грани икосаэдра от порядкового номера оболочки n . б) внешний вид кластеров с $n = 1 - 5$.

1. А где еще в наномире встречается данный тип симметрии?(1 балл)

2. Исходя из данных, представленных на Рисунке 1, выведите формулу зависимости количества атомов в кластере N от числа оболочек n (формулу общего члена численного ряда N_n). Подсказка: для начала рассчитайте количество атомов в n -ном слое икосаэдрического кластера (6 баллов). Максимальным баллом будет оцениваться наиболее полный вывод.

3. На основании полученной зависимости запишите формулы следующих икосаэдрических кластеров: $Au_{(n=1)}$, $Au_{(n=2)}$, $Fe_{(n=2)}$, $Fe_{(n=3)}$, $Pt_{(n=4)}(phen^*)_{36}O_{30}$, $Pd_{(n=5)}(phen)_{60}(OAc)_{180}$ (1 балл).

4. Рассчитайте размер металлического ядра для каждого из шести рассматриваемых в п. 3 кластеров. (Радиусы атомов принять $r(Au) = 0,144$ нм, $r(Pt) = 0,139$ нм, $r(Pd) = 0,138$ нм, $r(Fe) = 0,124$ нм). (2 балла)

5. Рассчитайте долю поверхностных атомов металла для каждого из кластеров, рассматриваемых в п. 3. (1 балл)

Можно пользоваться любыми справочными формулами, описывающими икосаэдр.

Низшие фуллерены (7 баллов) - 10 – 11 класс

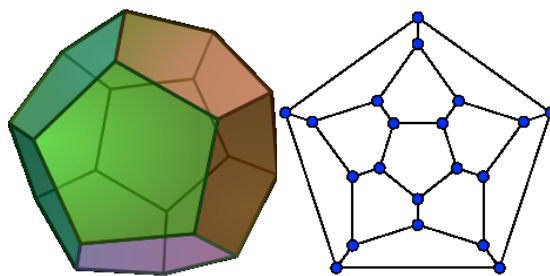


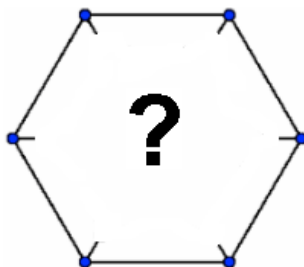
Рис. 1. Фуллерен C_{20} и его диаграмма Шлегеля.

Между самым маленьким фуллереном C_{20} и «классическим» фуллереном – бакиболом C_{60} – существует большое количество разнообразных фуллеренов, многие из которых имеют больше одного способа размещения пяти- и шестиугольников друг относительно друга. Разобраться с первыми членами этого ряда вам поможет диаграмма Шлегеля (рис. 1) – плоская проекция выпуклого многогранника на одну из его граней, не содержащая пересечений ребер.

1. Сформулируйте теорему Эйлера для произвольного фуллерена C_n . Выведите n через количество пяти- и шестиугольных граней (Γ_5 и Γ_6 , соответственно). Определите формулы фуллеренов с $\Gamma_6 = 1, 2, 3$. (1,5 балла)

2. Для каждого из трех рассматриваемых фуллеренов постройте диаграммы Шлегеля (или покажите невозможность их построения), а также постройте все возможные изомеры (или покажите, что их нет). (5,5 баллов)

Указания. Диаграмма Шлегеля будет легко читаема, если ставить точки в вершинах многоугольников. Чтобы упростить поиск, можете использовать тот факт, что среди перечисленных фуллеренов не существует ни одного с соприкасающимися шестиугольниками.



Рассматривая гипербакибол (8 баллов) - 10 – 11 класс

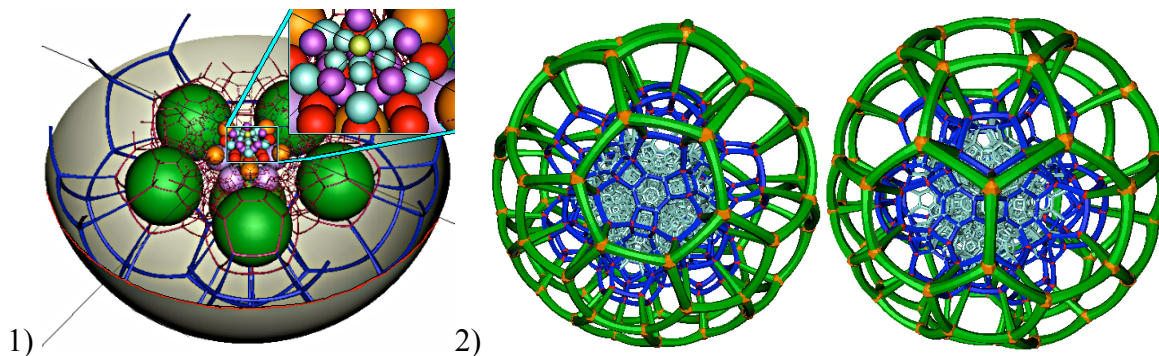


Рис. 1. Внешний вид 3D проекции Шлегеля* гипербакибола. 1) Разрез (полусфера) проекции. Внутри внутренних бакибольных ячеек C_{60} для визуализации помещены шары. В центральной части оставлены только помещенные внутрь ячеек шары, рёбра самого гипербакибола невидимы. 2) Полные проекции гипербакибола: две точки зрения.

В прошлом году некоторые из вас познакомились с додекаплексом C_{600} – самым маленьким 4D фуллереном – и гипербакиболом C_{7200} – четырёхмерным аналогом бакибола C_{60} (рис. 1). Несмотря на внушительный внешний вид, устроены они довольно просто. Додекаплекс состоит из одинаковых додекаэдров фуллерена C_{20} , а гипербакибол – из одинаковых ячеек фуллерена C_{60} . Интересен тот факт, что расположение ячеек C_{20} в 3D проекции Шлегеля додекаплекса и C_{60} в 3D проекции Шлегеля гипербакибола – идентично (доп. рис. 3).

Рассмотрим проекцию четырехмерного бакибола повнимательнее. Ячейки C_{60} в 3D проекции Шлегеля гипербакибола, в отличие от додекаэдрических ячеек в додекаплексе, не имеют общих вершин и разделены двумя типами дополнительных ячеек – пятиугольными призмами и ячейками X (рис. 2а, б).

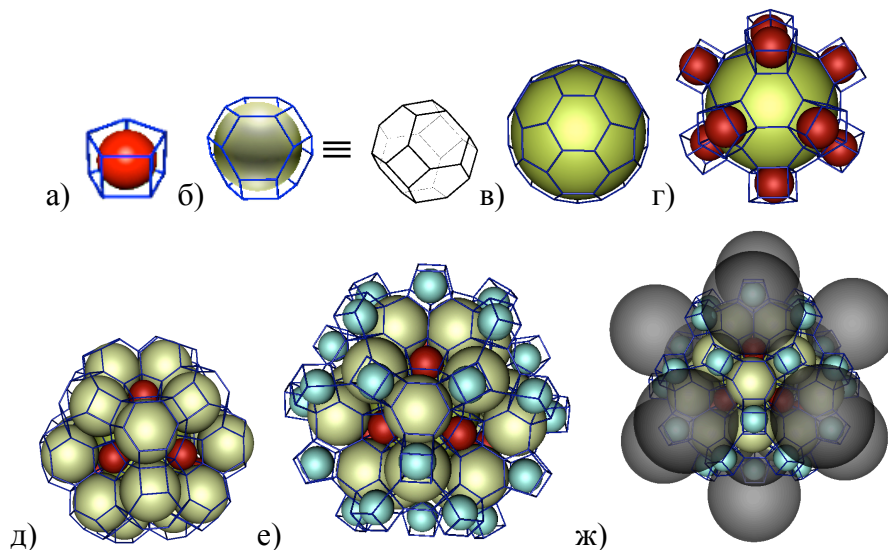


Рис. 2. Построение гипербакибола «снизу вверх»:

а) пятиугольная призма, б) ячейка X, в) центральная ячейка 3D проекции Шлегеля гипербакибола (№8 по рис. 3), г) на (в) построены пятиугольные призмы, д) на (г) построены ячейки X, е) на (д) построены пятиугольные призмы, ж) на (е) построен слой бакибольных ячеек (№7 по рис. 3).

1. Ячейку X можно получить усечением двух Платоновых тел. Назовите их. (1 балл)

2. На основе Рисунка 3, опишите ближайшее окружение каждого из трех типов ячеек (сколько и каких ближайших соседей, через какие грани они граничат). (2 балла)

3. Сколько пятиугольных призм и ячеек X содержит гипербакибол? Сколько и каких граней содержит гипербакибол? (4 балла)

4. Сколько всего ребер содержит гипербакибол? (1 балл)

При решении задачи не забывайте, что все однотипные ячейки гипербакибола эквивалентны, несмотря на возникающие при проекции геометрические искажения.

* - Подобно проецированию выпуклых 3D многогранников в 2D фигуры на плоскости, проекция Шлегеля 4D многогранников в одну из ячеек фигуры позволяет нам визуализировать их в виде трёхмерного объекта без самопересечений граней.









1  икосаэдр, 12 яч.	2  додекаэдр, 20 яч.	3  икосаэдр, 12 яч.	4  икосододекаэдр, 30 яч.
5  икосаэдр, 12 яч.	6  додекаэдр, 20 яч.	7  икосаэдр, 12 яч.	8  центральная ячейка

Рис. 3. Структура последовательного расположения слоев «основных» ячеек додекаплекса и гипербакибола.

Считаем РНК (2 балла) - 10 – 11 класс

Участок молекулы мРНК из 9 нуклеотидов кодирует участок молекулы белка, состоящий из трёх аминокислот. Из скольких различных кусков мРНК получаются белки, содержащие лейцин? Таблицу соответствия троек нуклеотидов и аминокислот найдите в справочной литературе или сети Интернет.