Заочная наноолимпиада по математике 2010.

Задача 9. Наноробот при изучении молекулы, атомы которой находятся в вершинах правильного тетраэдра, должен побывать, двигаясь в пространстве, на каждой грани и вернуться обратно. Известно, что расстояние между атомами равно 0.14 нм. Какое наименьшее расстояние он при этом может пройти?

Решение. Будем предролагать, что наноробот побывал сначало на грани ABC в точке E, потом — на грани BCD в точке F, затем — на грани DAB в точке G, и, наконец, на грани ACD в точке H, а затем вернулся в начальную точку.

Утверждение 1. *Пусть $KLMN$ четырёугольник в пространстве, P, Q — середины сторон KL, MN. Тогда справедливо $PQ \leqslant \frac{1}{2}(KN + LM)$.*

Доказательство. Пусть R середина диагонали LN. Тогда $PR = KN/2$, $RQ = LM/2$. Откуда $PQ \leqslant PR + RQ = (KN + LM)/2$.

Проведём через DC плоскость, перпендикулярно AB (это плоскость — плоскость симметрии для тетраэдра $ABCD$) и рассмотрим четырёхугольник $E_1F_1G_1H_1$, симметричный $EFGH$ относительно этой плоскости. Вершины E_1 и G_1 останутся на тех же гранях, что E и G соответсвенно, F_1 попадёт на одну грань с H, а H_1 — на одну грань с F. Периметры четырёхугольников $EFGH$ и $E_1F_1G_1H_1$ равны. Обозначим через E_2, F_2, G_2 и H_2 середины отрезков EE_1, FH_1, GG_1 и HF_1 соответственно. Вершины этого четырёхугольника тоже лежат награнях тетераэдра, и, согласно утверждению, периметр четырёхугольника $E_2F_2G_2H_2$ не больше периметра $EFGH$. Кроме того, вершины E_2, G_2 будут лежать на медианах граней ABC и ABD, выходящих из точек C и D соответственно.

Исходя из четырёхугольника $E_2F_2G_2H_2$, точно так же построим $E_3F_3G_3H_3$, симметричный ему относительно плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через AB, а затем, взяв середины отрезков, соединяющих вершины этих четырёхугольников, лежащих в одной грани получим $E_4F_4G_4H_4$, все вершины корого лежат в объединении двух плоскостей симметрии тетраэдра $ABCD$, проходящих через CD и DT. Таким образом вершины E_4, G_4 лежат на медианах CT и DT граней ABC и ABD, а вершины F_4 и G_4 — на мединах AS и BS граней ACD и BCD.

При этом периметр $E_4F_4G_4H_4$ не превосходит периметер $EFGH$. Значит периметр $EFGH$ больше либо равен $4d$, где d — расстояние между медианами CT и BS.

Далее ищем стандартным образом расстояние между скрещивающимися прямыми CT и BS. Итого

$$P_{EFGH} = 4 \cdot d = 4 \cdot \frac{0.14}{\sqrt{10}} = \frac{0.56}{\sqrt{10}}.$$

Ответ. $0.56/\sqrt{10}$ нм.

Замечание 1. *Некоторые участники предлагали выбрать путь из вершины (наноробот побывает на трёх гранях) по перпендикуляру на плоскость основания и обратно. Выше показано, что этот путь не оптимален, что легко проверить простым вычислением:*

$$2H = 2 \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 0.14 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 4 \cdot \frac{0.14}{\sqrt{10}}.$$