Заочная наноолимпиада по математике 2010.

Задача 7. Формируя кристалл из отдельных молекул, наноманипулятор строил его поверхность пошагово, используя на каждом шаге a_n молекул. На первом шаге было задействовано 3 молекулы, на втором — 8, на третьем 27. Через несколько шагов наноманипулятор завершил свою работу. Сколько молекул потребовалось бы наноманипулятору, если бы он продолжал работь до 2010 шага включительно, если известно, что количество молекул, задействованых на каждом шаге удовлетворяет уравнению:

$$a_{n+3} - a_n = 3(a_{n+2} - a_{n+1} + 8 \cdot 3^{n-1}).$$

Решение. Перепишем формулу, заданную в условии, в следующем виде:

$$a_{n+3} = 3(a_{n+2} - a_{n+1}) + a_n + 8 \cdot 3^n. \tag{1}$$

Найдём ещё несколько членов последовательности a_n

$$a_4 = 84 = 3^4 + 3 = 3^4 + 2^2 - 1,$$
$$a_5 = 251 = 3^5 + 8 = 3^5 + 3^2 - 1,$$
$$a_6 = 744 = 3^6 + 15 = 3^6 + 4^2 - 1.$$

Из этих формул легко прийти к гипотезе:

$$a_n = 3^n + (n-2)^2 - 1. \tag{2}$$

Докажем эту гипотезу по индукции:

1) Легко убедиться, что для $n = 1, 2, 3$ наша гипотеза справедлива. 2) Предположим, что гипотеза (2) справедлива для любого натурального $k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. 3) Докажем, что гипотеза (2) справедлива для номера $n+1$. Согласно предположению индукции, имеем:

$$a_n = 3^n + (n-2)^2 - 1,$$
$$a_{n-1} = 3^{n-1} + (n-3)^2 - 1,$$
$$a_{n-2} = 3^{n-2} + (n-4)^2 - 1.$$

Подставим это выражение в формулу (1):

$$a_{n+1} = 3(a_n - a_{n-1}) + a_{n-2} + 8 \cdot 3^n = 3^{n+1} + (n-1)^2 - 1.$$

Таким образом, методом математической индукции доказано равенство (2).

Остаётся найти требуемую сумму

$$\sum_{n=1}^{2010} a_n = \sum_{n=1}^{2010} (3^n + (n-2)^2 - 1) = \sum_{n=1}^{2010} 3^n + \sum_{n=1}^{2010} (n-2)^2 - \sum_{n=1}^{2010} 1 =$$
$$= (3/2)(3^{2010} - 1) + 1 + \sum_{n=3}^{2010} (n-2)^2 - 2010 = 3^{2011}/2 - 1/2 - 2010 + \sum_{n=1}^{2008} n^2 =$$
$$= (3^{2011} - 1)/2 - 2010 + 2008 \cdot (2008 + 1) \cdot (2 \cdot 2008 + 1)/6 = (3^{2011} - 1)/2 + 2700809194.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

которое легко доказывается по индукции.

Ответ. $(3^{2011} - 1)/2 + 2700809194$.

Замечание 1. *Можно было бы прийти к формуле* (2) *и доказать её иначе. Можно заметить, что при подстановке любого полинома* $b_n = an^2 + bn + c$ *вместо* a_n *выполнено тождество*

$$b_{n+1} = 3(b_n - b_{n-1}) + b_{n-2}.$$

Следовательно, с учётом левой части равенства (1), *разумно искать решение в виде* $a_n = an^2 + bn + c + d3^n$. *Коэффициеты* a, b, c, d *находим, подставив выражение* $a_n = an^2 + bn + c + d \cdot 3^n$ *в первые четыре равенства* $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, $a_4 = 84$.

Замечание 2. *Согласно гипотезе Дирака, общее число атомов во Вселенной — величина порядка* 10^{80}. *Так что наноманипулятор не сможет долго продолжать свою работу, использую такое количество молекул, как написано в условии задачи.*