

Заочная наноолимпиада по математике 2010.

Задача 4. Электрическая схема состоит из $2n + 1$ устройств, связанных между собой 90 нанопроводами так, что для любых двух из этих устройств существует единственное третье устройство, соединённое с каждым из этих двух устройств? Чему равно число n ?

Решение.

Отождествим устройства с точками на плоскости и обозначим их $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$, а нанопроводы — с отрезками, соединяющими соответствующие точки. Пусть, для определенности, точки A_1 и A_2 соединены отрезком. Тогда, по условию задачи, найдется единственная точка (пусть, для определенности, это будет точка A_3), которая соединена с точками A_1 и A_2 отрезками. Следовательно, эти точки образуют треугольник. Рассуждая аналогично, получим, что все $2n+1$ точки являются вершинами треугольников, причем, любые два треугольника имеют общую вершину.

Покажем, что существует точка, общая для всех треугольников. Применим метод математической индукции по числу n . При $n = 1$ утверждение верно. Пусть для некоторого значения $n > 1$ существует единственная вершина A_1 , общая для всех треугольников. Добавим точки A_{2n+2}, A_{2n+3} . Они образуют треугольник с одной из точек $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$. Если эта точка отлична от A_1 (например, это A_2), то для точек A_1 и A_{2n+2} не существует точки, соединенной с этими точками отрезками, что противоречит условию задачи. Геометрически это можно изобразить так:

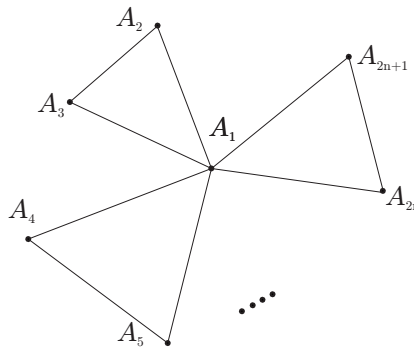


Рис. 1:

Из рисунка 1 видно, что число сторон треугольников равно $3n$. Из условия задачи следует равенство $3n = 90$, откуда находим $n = 30$.

Ответ. $n = 30$.