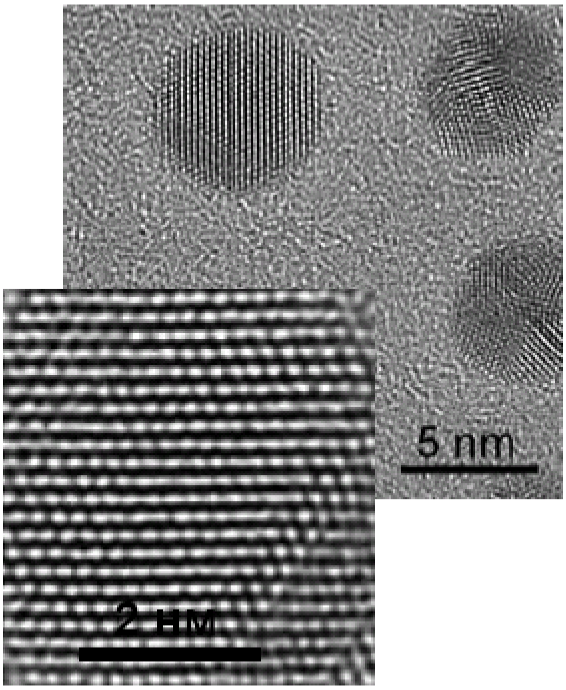
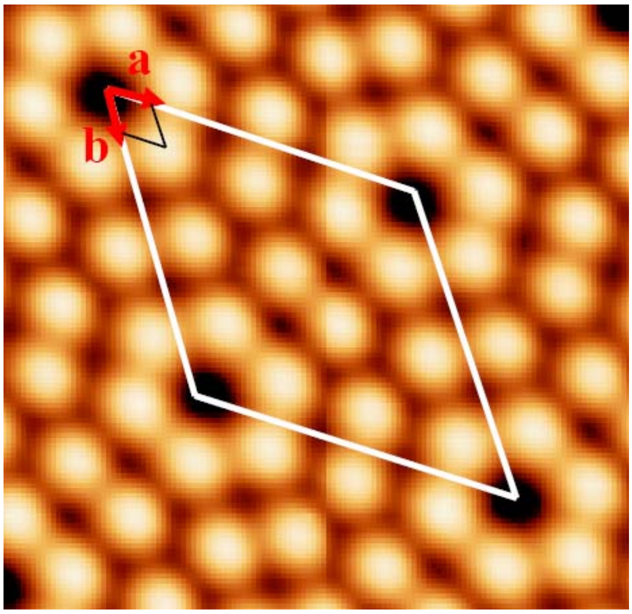
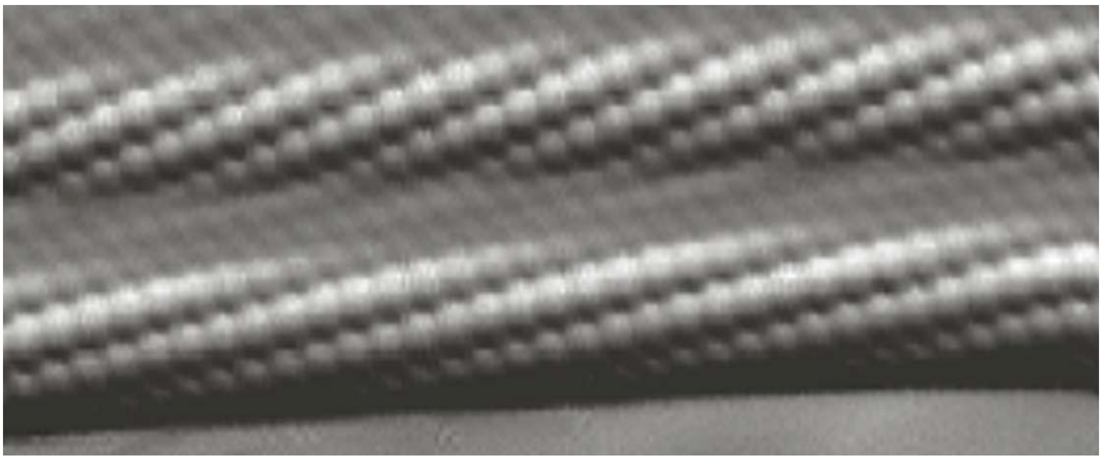
Физика наносистем и наноустройства (студенты, аспиранты, молодые ученые).
Задача 4 «Парадоксы микромира» (базовая).

1. Атомы – не шарики! (*2 балла)*

На сегодняшний день хорошо известно, что в микромире (а точнее, на атомных масштабах длин) законы классической физики перестают работать, и на смену им приходит квантовая механика. В силу соотношений неопределённостей Гейзенберга, точное расположение или границы какого-либо объекта в пространстве определить невозможно. Бессмысленно говорить о точном местонахождении электрона в атоме, а также о границе атома. Можно, конечно, говорить об орбиталях и электронной плотности, однако эта плотность есть в действительности амплитуда вероятности обнаружить электрон в окрестности некоторой точки в элементарном акте измерения, а не непрерывное распределение плотности заряда. Но почему же тогда на многих изображениях микро- и наноструктур, получаемых с помощью микроскопов разных типов (АСМ, ПЭМ, СЗМ, СТМ), атомы выглядят как шарики или «сгустки» материи? Какое обстоятельство, общее для разных типов микроскопии, позволяет формировать изображения, которые вы видите на рисунках?







2. Волны де Бройля ***(2 балла)***

Однажды двое юных друзей-нанотехнологов задались простым, на первый взгляд, вопросом: как связана частота волны де Бройля ω свободной частицы с волновым вектором k? Они решили вывести нужную формулу, но каждый из них действовал своим способом.

Первый рассуждал так. Запишем известную формулу связи (циклической) частоты с периодом: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Выразим период через длину волны и скорость: $T = \dfrac{\lambda}{\upsilon}$. Получается:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda} \qquad (1)$$

Далее применим соотношение де Бройля для импульса и длины волны: $\lambda = \dfrac{h}{p}$. Подставим это в (1), после чего учтём, что $h = 2\pi\hbar$, и умножим числитель и знаменатель дроби на массу частицы m. Затем применим определение импульса $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ и связь импульса с волновым вектором $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Получается цепочка равенств:

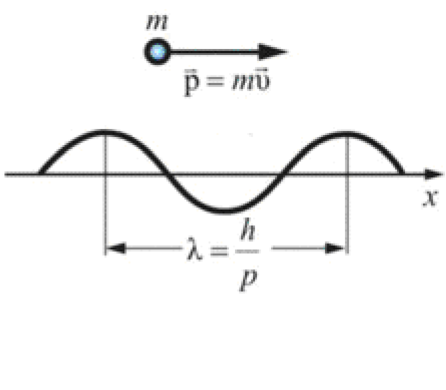
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda} = \frac{2\pi\upsilon p}{h} = \frac{p\upsilon}{\hbar} = \frac{pm\upsilon}{\hbar m} = \frac{\hbar^2 k^2}{\hbar m} = \frac{\hbar k^2}{m}, \qquad (2)$$

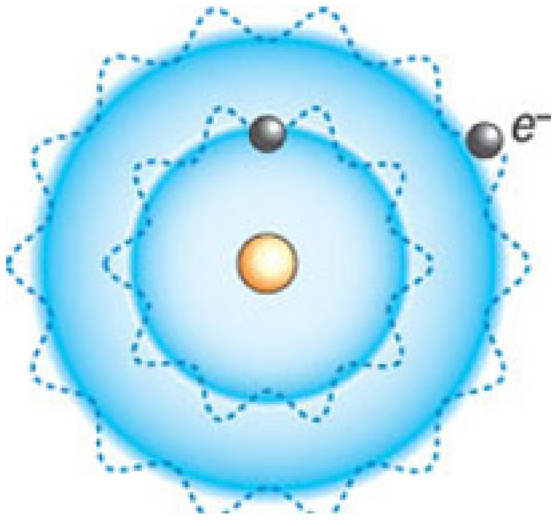
что и является искомой связью.

Второй друг рассуждал по-другому. Энергия и частота связаны соотношением $E = \hbar\omega$. Энергия в случае свободной частицы равна $E = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, а импульс равен $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Из двух последних равенств получаем, что $E = \dfrac{p^2}{2m}$. Учитывая, что $p = \hbar k$, имеем: $\hbar\omega = E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Отсюда следует ответ:

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \qquad (3)$$

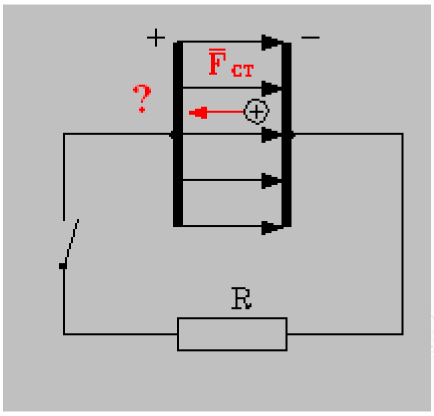
К удивлению друзей, их результаты (2) и (3) отличаются в 2 раза. Почему? Найдите ошибку в рассуждениях (или ошибки, если их несколько) и выведите правильную формулу для связи частоты и волнового вектора.

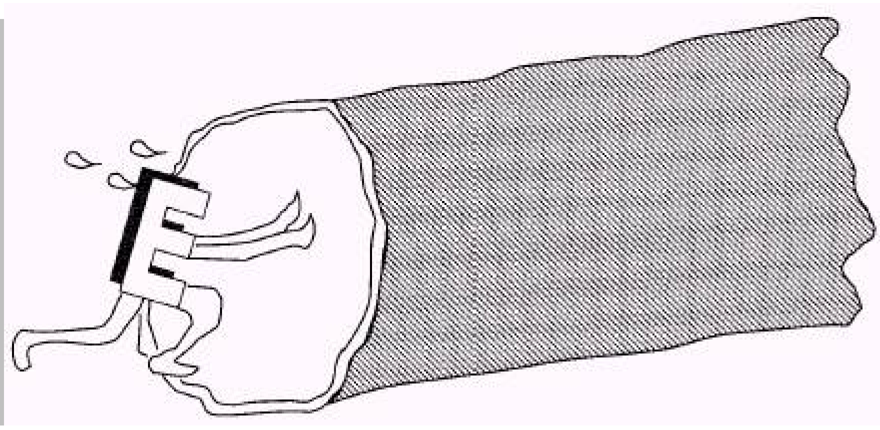




3. Природа электродвижущей силы ***(2 балла)***

Известно, что электродвижущая сила (ЭДС) всякого источника тока существует за счёт действия так называемых сторонних сил, которые действуют внутри источника и переносят заряженные частицы против кулоновских сил, обусловленных скоплением зарядов на полюсах источника. Именно за счёт действия сторонних сил полюса источника поддерживаются заряженными. Часто в литературе можно встретить утверждение о том, что сторонние силы, в отличие от кулоновских сил, имеют другую, не электромагнитную природу. Однако, возникает вопрос: если сторонние силы не электромагнитные, то какие они? В физике известно всего четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. К какому типу взаимодействий относятся сторонние силы, и в чём заключается их принципиальное отличие от кулоновских? Опишите механизм возникновения этих сил и причины их отличия от кулоновских сил с точки зрения квантовой механики. Рассмотрите случай химических источников тока и назовите как минимум два фактора, за счёт которых сторонние силы отличаются от кулоновских.





4. Идеальный квантовый газ ***(2 балла)***

Относительная простота моделей идеальных квантовых газов фермионов или бозонов позволяет решать аналитически множество задач, связанных с такими системами. Но идеальные газы могут служить лишь грубым, «нулевым» приближением реальных физических систем, поскольку частицы таких газов предполагаются свободными и не взаимодействующими друг с другом. В реальности частицы всегда взаимодействуют друг с другом и с внешними полями. Например, электроны в кристаллах не свободны, а находятся в потенциале кристаллической решётки, и, поскольку они заряжены, они всегда взаимодействуют друг с другом. Поэтому возникает вопрос о границах применимости моделей таких газов. Для газа электронов критерий применимости модели по силе взаимодействия можно получить следующим образом. Взаимодействие слабое, если характерная удельная (т.е. приходящаяся на одну частицу) потенциальная энергия взаимодействия ε_{int} электронов много меньше их кинетической энергии. Характерная кинетическая энергия по порядку величины равна энергии Ферми ε_F. Отсюда получаем условие «идеальности» газа: удельная энергия взаимодействий должна быть много меньше энергии Ферми

$$\varepsilon_{\text{int}} << \varepsilon_F \qquad (4)$$

Для трёхмерного газа электронов энергия Ферми рассчитывается по стандартной формуле

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (5)$$

где m – масса электрона, N – общее число электронов, V – объём газа. Величина $n = \dfrac{N}{V}$ есть концентрация электронов. Удельную энергию кулоновского взаимодействия электронов легко оценить, полагая, что характерное (усреднённое по энергии взаимодействия) расстояние между двумя взаимодействующими электронами равно $r = \sqrt[3]{\frac{V}{N}}$. Тогда для энергии взаимодействия имеем (в системе единиц, где коэффициент пропорциональности в законе Кулона равен единице; e – заряд электрона)

$$\varepsilon_{\text{int}} \approx e^2 \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (6)$$

Подставим (5) и (6) в (4):

$$e^2 \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} << \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

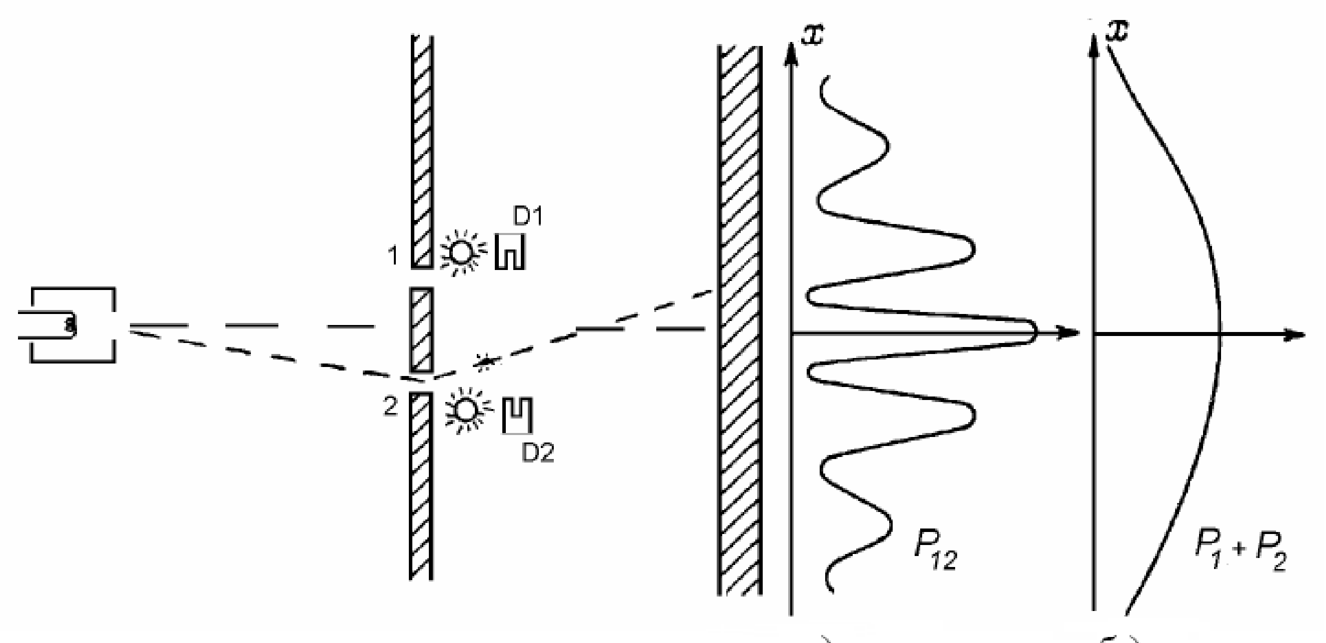
Умножая обе части этого неравенства на $\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{N}{V}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и пренебрегая числовым коэффициентом, получаем условие «идеальности» газа электронов в виде

$$\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{\frac{N}{V}} >> \frac{me^2}{\hbar^2} \qquad (7)$$

Получается парадоксальный результат: чем больше концентрация электронного газа (т.е. чем больше его плотность), тем он более идеальный. В случае классического (не квантового) газа ситуация обратная: реальный газ тем ближе к идеальному, чем меньше его плотность, а при больших плотностях как раз возникают отклонения в поведении реального газа от идеального. Более того, все результаты, полученные для квантовых газов, должны в предельном случае переходить в соответствующие результаты для классических газов, но результат (7) прямо противоположен классическому случаю. Как же объяснить полученный результат и разрешить противоречие?

5. Присутствие наблюдателя *(2 балла)*

На рисунке изображена упрощённая, идеализированная схема одного из известных и самых интригующих экспериментов, которые привели к созданию современной квантовой механики: дифракция электронов на экране с двумя щелями.



а.) б.)

Источник электронов достаточно слабый, такой, что в каждый момент времени между ним и экраном, на котором формируется интерференционная картина, находится не более одного испущенного им электрона. Результат этого эксперимента хорошо известен: если около щелей 1 и 2 нет детекторов, которые фиксируют прохождение электрона сквозь щель, то на экране при достаточно долгом экспозиционировании появляется интерференционная картина (рисунок а.) Если же установить детекторы D1 и D2, то картина исчезает, и на экране наблюдается «сумма интенсивностей» $P_1 + P_2$ (рисунок б.) Результат как будто бы зависит от того, наблюдаем ли мы за электроном или нет (получаем ли мы информацию о том, через какую из щелей прошёл электрон). Объяснение этого эксперимента состоит в том, что при взаимодействии электрона с фотоном детектора происходит редукция волнового пакета (редукция волновой функции, которая описывает состояние электрона). Но возникает следующий вопрос. На пути от источника до экрана-приёмника электрон, так или иначе, взаимодействует с экраном, в котором имеются две щели (действительно, если бы этого экрана не было, то мы не наблюдали бы интерференцию). Это взаимодействие электромагнитное, и, с точки зрения квантовой теории поля, оно осуществляется за счёт обмена квантами электромагнитного поля (фотонами). Почему при взаимодействии электрона с детектором происходит редукция волнового пакета, а при его взаимодействии с экраном со щелями редукция не происходит? В чём принципиальное различие между этими двумя взаимодействиями? Каким будет результат эксперимента, если установить только один детектор около одной из щелей (только D1 или только D2)?

Методические замечания:

1. Задача решается в рамках базовых знаний и здравого смысла

2. Вопросы можно задать в специальном разделе форума http://www.nanometer.ru/forum/viewforum.php?f=19 или найти ответ самостоятельно (в том числе изучив доступные Вам Лекции на сайте Олимпиады http://www.nanometer.ru/lectures.html?UP=156195)

3. Решение оформляется и отсылается только в электронном виде, как описано в инструкциях к работе с задачами и решениями заочного теоретического тура, приведенных в разделе «Олимпиада» http://www.nanometer.ru/olymp2_o4.html

4. Подписывать решения не надо, Ваша фамилия, имя и отчество будут зашифрованы при проверке, идентификация для системы проверки производится по логину и паролю, который Вы вводите при входе на сайт Олимпиады www.nanometer.ru в качестве участника (этот пароль Вы задавали при регистрации и заполнении анкеты участника).