



КОНСТРУКЦИИ ИЗ УГЛЕРОДА

О ФУТБОЛИНО ИЗ СЕМЕЙСТВА ФУЛЛЕРЕНОВ,

О ФУЛЛЕРИТАХ И НЕМНОГО —

О ШВАРЦИТАХ

СЕРГЕЙ ТИХОДЕЕВ

Все знают, что углерод — один из самых распространенных в природе элементов. А знаете ли вы, что атомы углерода — замечательный строительный материал для самых разнообразных кристаллов и молекул? Алмазу, одной из кристаллических модификаций углерода, принадлежит рекорд твердости. Сложные органические молекулы белков, у которых атомы углерода (и азота) составляют своего рода атомный скелет, образуют основу живых организмов.

Большое разнообразие атомных конструкций с участием атомов углерода объясняется тем, что углерод, элемент IV группы таблицы Менделеева, имеет четыре валентных электрона, а

внешней валентной оболочке и может образовывать химические связи с четырьмя, тремя или двумя ближайшими соседями. Если у углерода четыре ближайших соседа, атомная конструкция получается трехмерной. Пример такой конструкции — кристалл алмаза, в котором каждый атом углерода находится в середине правильного тетраэдра, вершины которого — ближайшие атомы углерода. Если ближайших соседей два, возникают линейные (т.е. одномерные) конструкции, например длинные полимерные молекулы. В случае же трех ближайших соседей атомные конструкции содержат плоские участки. Например, в плоской молекуле бензола C_6H_6 каждый атом углерода связывается с одним водородом и двумя углеродами.

Еще один пример атомной конструкции, в которой каждый углерод имеет три ближайших соседа, — кристалл графита, вторая природная форма углерода. Графит — кристалл слоистый, основой его конструкции являются плоскости, в которых атомы лежат в вершинах правильных шестиугольников, образуя подобие пчелиных сот. Легко понять, что если каждый атом углерода связывается только с тремя ближайшими атомами и все атомы расположены совершенно одинаково, ничего другого и не построить. К счастью, между соседними углеродными плоскостями имеется притяжение, которое и связывает углеродные слои в кристалл графита. Эти силы притяжения (они называются силами

Ван-дер-Ваальса и убывают с расстоянием как r^{-7}) гораздо слабее сил взаимодействия между соседними атомами углерода в одном слое. Поэтому графит механически непрочен, и из него можно делать грифели для карандашей. Однако сами углеродные плоскости столь же прочны, как и алмаз.

Зададимся теперь следующим вопросом: нельзя ли построить из углерода что-нибудь более интересное, чем плоскость в кристалле графита, например многогранник? Так как у каждого атома углерода должно быть ровно три соседа, то возникает следующая геометрическая задача: как сконструировать многогранник, в каждой вершине которого сходится ровно три ребра?

Воспользуемся теоремой Эйлера: Для всякого выпуклого многогранника справедливо равенство

$$B + \Gamma - P = 2, \quad (1)$$

где B — число вершин многогранника, Γ — число граней и P — ребер. Для более сложных многогранников теорему (1) надо изменить, введя такое понятие, как число ручек многогранника g . (Что такое число ручек у замкнутой поверхности, можно понять из рисунка 5 к статье В. Арнольда, помещенной в этом же номере журнала. — Прим. ред.). Например, для тора $g = 1$, т.е. он имеет одну ручку, а для выпуклого многогранника g , конечно, равно нулю.

Обобщенная теорема Эйлера выглядит так:

$$B + \Gamma - P = 2 - 2g. \quad (2)$$

Доказать равенство (2) удивительно просто. Достаточно заметить, что каждая ручка многогранника и сам многогранник с отрезанными ручками удовлетворяют соотношению (1), а в результате приклеивания каждой ручки четыре склеивающиеся грани исчезают, в то время как разность $B - P$ не изменяется.

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы

многогранников из атомов углерода. Предположим, мы собираемся построить замкнутый многогранник с одними шестиугольными гранями, число которых равно n_6 . Так как в каждой вершине должно сходиться три грани, а каждое ребро принадлежит двум граням, получаем

$$B = 6n_6/3, \Gamma = n_6, P = 6n_6/2. \quad (3)$$

В результате подстановки в равенство (2) получаем $g = 1$. Так что из одних шестиугольников можно построить только многогранник, топологически эквивалентный тору.

Если мы хотим конструировать более разнообразные фигуры, шестиугольных «графитообразных» граней недостаточно. Пусть кроме n_6 шестиугольников имеется n_5 пятиугольников и n_7 семиугольников. Повторяя рассуждения, получим

$$n_5 - n_7 = 6(2 - 2g). \quad (4)$$

Так что если нас интересуют выпуклые многогранники ($g = 0$), то можно обойтись без семиугольников, но в этом случае придется добавить ровно двенадцать пятиугольников. (Кстати, этот факт заметил и доказал сам Эйлер.) При создании более сложных фигур придется использовать и семиугольники.

Итак, мы вывели основные правила построения сложных объемных конструкций из атомов углерода. Аналогичные конструкции больших размеров встречаются в природе. Например, так устроены скелеты радиолярий — простейших организмов в морском планктоне — и многие вирусы (см. рисунок к заметке Д. Джоунса «Полые молекулы». — Прим. ред.). Известны такие конструкции и в архитектуре. Достаточно упомянуть ячеистые купола знаменитого американского архитектора и инженера Р. Бакминстера Фуллера (р. 1895). Впрочем, чтобы понять, что такие конструкции не редкость, достаточно взять в руки стандартный футбольный мяч, сшитый из 20 шестиугольников и 12 пятиугольников. Но вот вопрос: можно ли построить такие конструкции из настоящих атомов углерода?

ФУЛЛЕРЕНЫ И ФУЛЛЕРИТЫ. В 1985 году Х.Крото (Великобритания) и Дж.Хит, С.О'Брайен, Р.Карл, Р.Смэлли (США) обнаружили, что при лазерном испарении графита в струе гелия образуются весьма устойчивые молекулы, состоящие из большого (32—90), причем всегда четного, числа атомов углерода. Наибольшей устойчивостью обладала молекула C_{60} , и авторы предположили, что она имеет форму пустотелого футбольного мяча (рис 1). В честь Бакминстера Фуллера авторы назвали свою молекулу бакминстерфуллереном (сокращенное название этой молекулы — бакибол (buckyball) или футболино), а весь класс молекул C_{2k} — фуллеренами. Оказалось, что фуллерены отнюдь не дико-



ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА БАКМИНСТЕРФУЛЛЕРЕНА C_{60} (ФУТБОЛИНО). В ВЕРШИНАХ МНОГОГРАННИКА НАХОДЯТСЯ АТОМЫ УГЛЕРОДА.

винка: такие молекулы в изобилии встречаются в свечном нагаре, газовой саже и прочих веществах, сопровождающих неполное сгорание. Вся проблема в том, чтобы выделить чистую фракцию таких молекул (т.е. получить вещество, не содержащее почти ничего иного).

В молекуле бакминстерфуллере C_{60} вершинами являются атомы углерода, а ребрами — их валентные связи. Свободных связей у C_{60} нет, и этим объясняется его большая химическая и физическая устойчивость. Молекула C_{60} является наиболее симметричным и наиболее устойчивым фуллереном. Следующая (в порядке возрастания числа атомов углерода) устойчивая молекула C_{70} состоит из 25 ше-

стиугольников и тех же 12 пятиугольников, она образуется несколько реже, чем C_{60} . Высокосимметричные молекулы C_{240} , C_{540} и C_{960} , которые, как предполагается, тоже должны быть устойчивыми, пока не обнаружены. Любопытно, что ничто не препятствует тому, чтобы молекула C_{960} содержала внутри себя молекулу C_{540} и т.д. Таких составных

молекул тоже пока не обнаружили, но название для них «матрешко» (Russian egg) — уже придумали.

Любопытно, что идея полых молекул почти за 20 лет до их открытия была высказана Дэвидом Джоунсом, который на протяжении многих лет был автором знаменитой «колонки Дедала» в журнале New Scientist (см. номер от 3 ноября 1966

г.). В 1982 году Д.Джоунс собрал 129 своих заметок в отдельную книжку «Изобретения Дедала», русский перевод которой вышел в издательстве «Мир» в 1985 году, т.е. в год открытия фуллеренов.¹

В настоящее время размеры футболино хорошо известны: его радиус равен 3,512 Å, длина короткой связи (разделяющей шестиугольники) равна 1,388 Å, а длинной (общей для шестиугольников и пятиугольни-

¹ Наш журнал не раз знакомил читателей с изысканными научными фантазиями Дедала. Заметку «Полые молекулы» (отрывок из которой вы найдете сразу после этой статьи) можно уже считать не фантазией, а сбывшимся научным предсказанием. (Прим. ред.)

ков) — $1,433\text{\AA}$. Это очень близко к данным для графита. Квантовомеханические расчеты показывают, что валентные электроны должны быть распределены более или менее равномерно по сферической оболочке толщиной примерно 8 а.е. ($1\text{ а.е.} = 0,529\text{\AA}$). Причем в центре футболино должна оставаться практически свободная от электронов полость радиусом около 2 а.е. . Так что молекула C_{60} является как бы маленькой пустой клеткой. Кстати, наличие полости внутри футболино уже, похоже, подтверждено экспериментально, при помощи так называемого мюонного анализа. (Роль чувствительного элемента в этом методе играет мюоний — что-то вроде атома водорода, только вместо протона он содержит мюон, элементарную частицу с зарядом $+e$ и массой $200m_e$. Свойства мюония сильно зависят от того, какова электронная плотность в той точке пространства, где он находится. Ученым удалось посадить мюоний внутрь «фуллереновой клетки» и показать, что свойства плененного и свободного мюония почти не различаются.)

Свободные футболино слабо притягиваются друг к другу ван-дер-ваальсовыми силами (той же природы, что и между углеродными слоями в кристалле графита). Благодаря этому притяжению, при комнатных температурах футболино кристаллизуются в механически непрочный кристалл желтовато-красного цвета с кубической гранецентрированной решеткой. Назвали новый кристалл фуллеритом. Расстояние между ближайшими футболино в этом кристалле при комнатной температуре — $10,0\text{\AA}$. Чистый, т.е. состоящий из одних футболино, фуллерит является диэлектриком. На рисунке 2 показана элементарная ячейка фуллерита. Футболино в кристалле фуллерита играют такую же роль, как и атомы в обычном кристалле. Многие физические свойства фуллерита (электронный спектр, например) можно рассчитать с боль-

тивными атомами и используя обычные методы расчета кристаллов.

Новые углеродные молекулы — фуллерены — и образованные из них кристаллы — фуллериты — являются третьей формой существования углерода в природе, или, используя научную терминологию, третьим аллотропом углерода. Причем первые два аллотропа — алмаз и графит — имеют на своей поверхности свободные связи, которые, стремясь насытиться, захватывают посторонние атомы, например атомы водорода. С фуллеренами и фуллеритами такого не происходит (у них нет свободных связей), так что среди аллотропов углерода они — самые чистые.

Как построить фуллерен. К середине 80-х годов, времени открытия фуллеренов, были великолепно разработаны методы экспериментального получения так называемых кластерных молекул — т.е. молекул, состоящих из небольшого числа одинаковых атомов. Обычно число атомов в таких кластерах достаточно произвольно. Однако уже первые эксперименты с углеродом преподнесли неожиданный сюрприз: большие кластеры с нечетным числом углеродов не образовывались! Сначала этот факт пытались объяснить образованием полимерных цепей из $[-C\equiv C-]$. Х.Крото и др. первыми дали правильную интерпретацию, но не смогли провести достоверного структурного анализа — у них было слишком мало фуллеренов. Их объяснение оставалось гипотезой, а фуллерены — экзотической игрушкой для теоретиков, пока примерно два года назад (летом 1990 года) не произошло революционное событие: был предложен способ производства фуллеренов в промышленных масштабах. Решение было найдено совершенно нетривиально американскими астрофизиками, специалистами по космической пыли В.Крэчмером, Д.Хуффманом и их студентами Л.Лэмбом, К.Фостиропу-

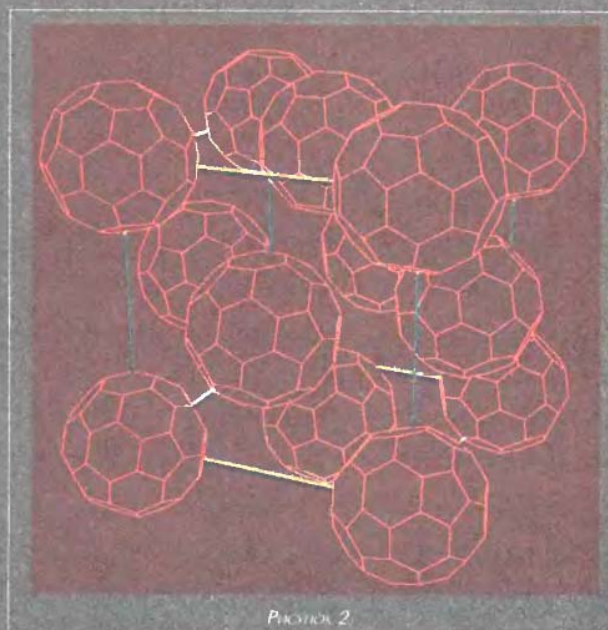


Рисунок 2

Устройство чистого фуллерита — кристалла, образованного из бакминстерфуллеренов. Показана одна элементарная ячейка кристалла. Футболины находятся в вершинах куба и в центрах граней.

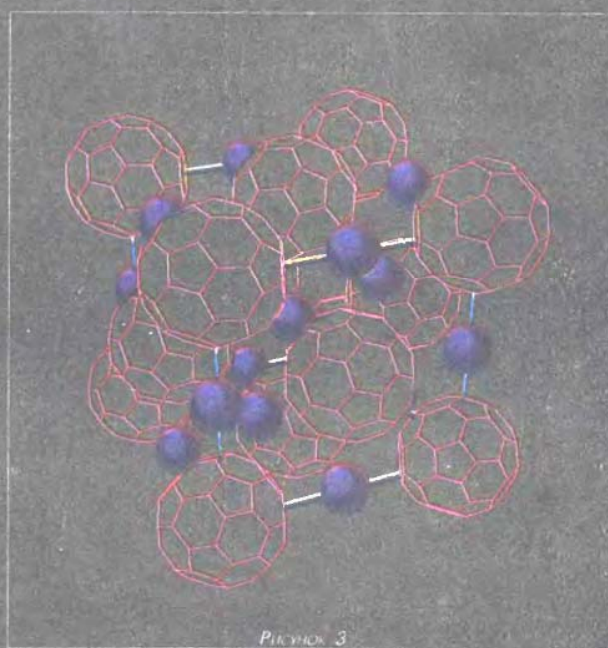


Рисунок 3

Кристаллическая структура сверхпроводящего фуллерита K_xC_{60} . Маленькие шарики соответствуют атомам легирующей примеси [калия].

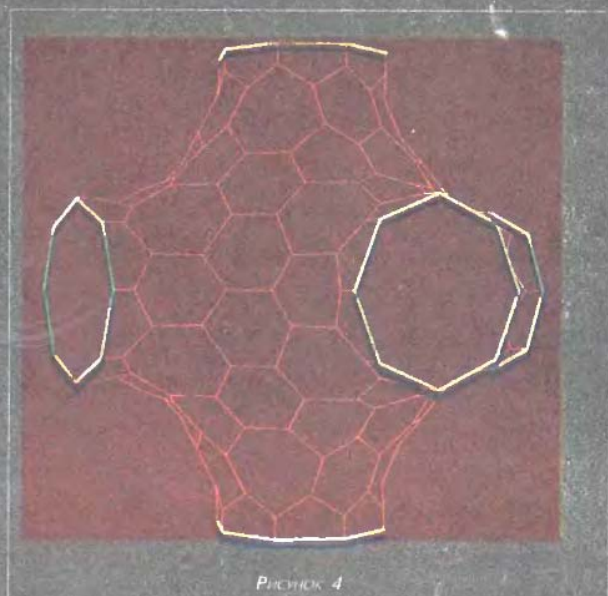


Рисунок 4

Элементарная ячейка одного из шварцитов — бесконечной поверхности, образованной из атомов углерода.

но давно, в 1983 году, попытались воспроизвести в своих экспериментах условия образования углеродной космической пыли. С этой целью они испаряли нагретый электрическим током графит в гелиевой атмосфере. После открытия бакминстерфуллера авторы решили повторить свои старые эксперименты. И для выделения предполагаемых молекул сферической формы воспользовались старым химическим правилом: растворяй подобное подобным. Они растворили образующийся при испарении угольный нагар в бензоле (также состоящем из замкнутых молекул). Образовалась жидкость желто-красного, зависящего от концентрации, цвета. Как ско-

екой атмосфере и дальнейшее растворение сажи в органическом растворителе — остолись. Так что при отлаженном производстве цена конечного продукта должна определяться просто стоимостью затраченной электроэнергии: примерно 5 центов на грамм фуллеренов!

Как образуются фуллерены при сжигании графита и почему гелиевая атмосфера столь существенна? Как уже говорилось, кристалл графита состоит из плоских слоев, составленных из углеродных шестиугольников. При испарении графита в электрической дуге сначала, по всей видимости, образуются достаточно мелкие углеродные кластеры, имеющие линейную структуру и большое число свободных связей. В охлаждающей атмосфере гелия эти



Рисунок 5

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ЭТАПЫ ОБРАЗОВАНИЯ БАКМИНСТЕРФУЛЛЕРЕНА C_{60} ПРИ ИСПАРЕНИИ ГРАФИТА В ГЕЛИЕВОЙ АТМОСФЕРЕ.

ро выяснилось, растворившаяся фракция сажи на 75% состояла из молекул C_{60} , на 23% — из C_{70} , а остальное приходилось на еще большие фуллерены. После выпаривания бензола на дне кюветы остались маленькие кристаллики фуллерита! Собственно анализ этих кристаллов и дал первую достоверную информацию о свойствах и форме фуллеренов.

В дальнейшем этот метод был усовершенствован. Оказалось, что для получения насыщенной фуллеренами угольной сажи удобно использовать электрическую дугу между графитовыми электродами. При выделении мономолекулярных фракций из фуллеренового раствора добиваются 99,99-процентной чистоты молекулярного состава. Но основные фазы производства

кластеры образуют графитовые «чешуйки», как бы обрывки графитовых плоскостей (рис.3). Этим чешуйкам энергетически выгодно перестроиться (ведь у них по краям разомкнутые связи, иметь которые невыгодно): образовать вместо некоторых шестиугольников пятиугольники и вследствие этого выгнуться (при этом концы свободных связей сблизятся и их энергия уменьшится). Если учесть, что соседство пятиугольников друг с другом энергетически невыгодно, в результате этой эволюции разомкнутые концы должны сойтись и автоматически получится структура футбольного мяча! (Футболино — это минимальный фуллерен, в котором пятиугольники не имеют общих ребер.) Таким образом, если фуллерен растет достаточно медленно, он с необходимостью должен быть бакминстерфуллереном. В реальных условиях,

чем образовалась идеальная структура футболино, и тогда возникнут другие структуры.

То, что охлаждающей баней (это — не образ, а научный термин) при росте фуллеренов служит инертный гелий, тоже не случайно. Объяснение в том, что гелий не насыщает свободные углеродные связи, давая углеродной чешуйке замкнуться самой на себя. Если в атмосфере сгорания были бы, например, атомы водорода, они могли бы насытить какие-то из свободных связей, симметрия сворачивающейся чешуйки нарушилась бы, и ее противоположные стороны не смогли бы сойтись. В результате вместо сферических замкнутых молекул начали бы расти структуры, подобные раковине улитки. Кстати, именно этот процесс и приводит к образованию угольной сажи при неполном сгорании в обычной атмосфере.

Самый-самый... — фуллерен. Предполагаемых применений фуллеренов очень много. Например, как основы для производства уникальных смазочных материалов. Как уже говорилось раньше, молекула C_{60} очень прочна химически и механически. Механическая прочность проверялась так: поток футболино разгонялся до скорости 30000 км/ч (по порядку величины это первая космическая скорость) и направлялся на стальную стенку. После отражения фуллерены не разрушались! Такие свойства как раз и нужны для основы смазочного материала. Так что фуллерен C_{60} — это не только самый маленький в мире футбольный мяч, это еще и самый маленький и самый прочный шарикоподшипник.

С химической устойчивостью и пустотелостью фуллеренов связаны возможности их применения в химии, микробиологии и медицине. Вот один пример. Похоже, что фуллерены не имеют себе равных в качестве «упаковочных материалов» для отдельных атомов. В

как лантан или уран. Такие запакрованные атомы открывают неожиданные возможности для химиков. Например, использование фуллеренов для упаковки и доставки в требуемое место не только атомов, но и целых молекул, в том числе органических. Чем не находка для фармацевтов и микробиологов? Так что наш самый маленький в мире футбольный мяч оказывается к тому же и самым маленьким упаковочным ящиком, своего рода атомной авоськой.

Сейчас в молекулярной биологии для целей генной инженерии применяют вирусы (многие из которых, кстати, имеют форму футболино). Если удастся использовать фуллерены для переноски требуемой органической молекулы в требуемое место белка, будет создан искусственный специализированный вирус, и опять же — рекордно маленький! (Надеюсь, конечно, что во благо жизни на Земле.)

Теперь о микроэлектронике. Как известно, в последнее время процесс миниатюризации электронных приборов дошел в некотором смысле до своего естественного предела: молекулярных и атомных размеров. Собственно, уже и термин для новой технологии используется другой: не микро-, а наноэлектроника (поскольку характерные размеры элементов — нанометры, 10^{-9} м). Так вот, в области наноэлектроники наибольший интерес с точки зрения возможных приложений вызывают так называемые квантовые точки (quantum dots), т.е. включенные в наноэлектронную схему микрокристаллы или другие образования, которые могут удерживать вблизи себя (локализовать) электроны. Оказывается, такие точки обладают рядом уникальных оптических свойств, которые позволяют использовать их, например, для управления волоконной оптической связью либо в качестве элементов процессора в проектируемом в настоящее время оптичес-

квантовыми точками. Продолжая наш список рекордов, можно сказать, что фуллерены имеют шанс стать самой маленькой микросхемой в компьютерном нанопроцессоре.

И наконец, высокотемпературная сверхпроводимость. После открытия в 1986 году Беднорцем и Мюллером высокотемпературных оксидных сверхпроводников все новые вещества стали проверять «на предмет возможности сверхпроводимости». Конечно, чистый фуллерит, о котором говорилось выше, будучи диэлектриком давал мало шансов для сверхпроводимости. Однако рецепт превращения диэлектрика в проводник хорошо известен: легирование. Атомы подходящей примеси могут, например, служить донорами необходимых для передачи электрического тока электронов. Именно путем легирования был получен первый высокотемпературный сверхпроводник $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (здесь $x = 0,1-0,2$ — концентрация примеси, в данном случае стронция). И вот в начале 1991 года произошла новая сенсация: А. Хебард и др. открыли, что легированный калием фуллерит K_3C_{60} становится сверхпроводником при температуре 18 К (-255°C). Конечно, не рекордно высокая температура. Но после замены калия на рубидий температура сверхпроводящего перехода возросла до 28–29 К. Как раз с таких температур и началась в 1986 году сверхпроводящая гонка — ведь до этого десятилетиями не удавалось поднять температуру сверхпроводящего перехода выше 24 К. Началась она и сейчас, и уже есть сообщения о повышении критической температуры до 43 К. Причем, благодаря прочности молекулы C_{60} , сверхпроводники на их основе обладают, по-видимому, большой стабильностью. И этим выгодно отличаются от высокотемпературных оксидных сверхпроводников. Кристаллическая структура такого сверхпроводящего фуллерита показана на

Еще одна форма углерода: шварцит.

Итак, ячеистые конструкции из углеродных шестиугольников и пятиугольников открыты и весьма интенсивно исследуются. А как обстоят дела с семиугольниками?

Экспериментально такие структуры еще не получены, но теоретики уже моделируют на компьютерах их свойства. Причем здесь возникает даже больше возможностей, чем в случае фуллеренов. В качестве примера приведем углеродную «губку», в которой сложная выложенная из шестиугольников и семиугольников поверхность разделяет трехмерное пространство на два подпространства.

Назвали такие структуры шварцитами — в честь немецкого математика Шварца, который первым исследовал такие поверхности в конце прошлого века.

На рисунке 5 показана лишь одна элементарная ячейка шварцита. Весь кристалл получается бесконечным повторением таких ячеек. Шварцит имеет кристаллическую решетку такого же типа, как и фуллерит на рисунке 2 — кубическую гранецентрированную. В элементарной ячейке 216 вершин, 24 семиугольника, 80 шестиугольников и 3 ручки. Обратите внимание, что в данной периодической структуре ручки соединяют между собой соседние ячейки кристалла; на рисунке 5 каждая ручка рассечена пополам и показана только ее половина.

Как уже говорилось, экспериментально такие структуры пока не наблюдались. Однако если ученые найдут способ синтезировать этот новый аллотроп углерода, они получат материал с интереснейшими механическими, физическими и химическими свойствами.

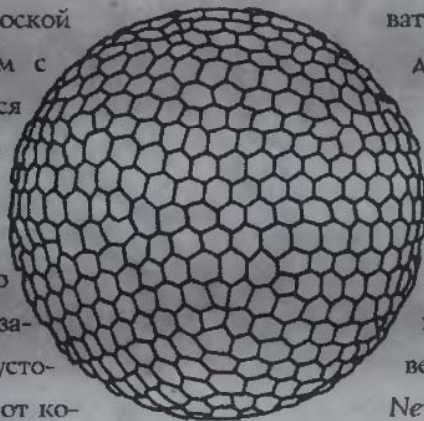
Автор благодарен Григорию Копелевичу, сделавшему компьютерные иллюстрации

к статье.

ПОЛЫЕ МОЛЕКУЛЫ (Из книги Дэвида Джонса «Изобретения Дедала»)

Существует любопытный разрыв между значениями плотности газов (порядка $0,001 \text{ г/см}^3$), с одной стороны, и жидкостей и твердых тел (от $0,5$ до 25 г/см^3) — с другой. Размышляя над тем, как заполнить этот разрыв, Дедал пришел к идее полой молекулы. Такая молекула могла бы представлять собой замкнутую сферическую оболочку плоской полимерной молекулы, подобной «молекуле» графита, имеющей плоскую гексагональную структуру — нечто вроде сетки с шестиугольными ячейками. Дедал предлагает модифицировать процесс высокотемпературного синтеза графита путем введения соответствующих примесных атомов или молекул, что вызвало бы изгиб плоской структуры (подобным образом с помощью примесей добиваются нужной структуры полупроводникового кристалла). Искривление плоского листа в конечном счете приведет к смыканию растущих краев и образованию замкнутой поверхности. Радиус пустотелой молекулы будет зависеть от количества введенной примеси. По расчетам

Дедала, вещество, состоящее из полых молекул радиусом $0,05 \text{ мкм}$, будет иметь плотность около $0,04 \text{ г/см}^3$, т.е. что-то среднее между плотностью жидкости и плотностью газа; такое вещество можно рассматривать как некое «пятое состояние» вещества. Эти гигантские молекулы (с относительной молекулярной массой до 100 млн. единиц) едва ли способны «испаряться», а взаимодействовать между собой они будут так слабо, что подобное «состояние» вещества нельзя будет отнести ни к газообразному, ни к жидкому. Скорее всего, его можно рассматривать как «разреженную» жидкость, не улетучивающуюся из открытого сосуда, но и не принимающего его форму; при нагревании это вещество будет расширяться и переходить (не закипая) в газообразное состояние.



Столь замечательные вещества, безусловно, найдут множество применений — они открывают путь к созданию новых конструкций барометров и автомобильных амортизаторов, к новым принципам ожижения; вероятно, они окажутся идеальными смазочными материалами, обладающими, помимо ничтожно малой вязкости, еще и «эффектом шарикоподшипника». Вначале Дедал беспокоился, что внешние нагрузки приведут к деформации этих молекул, но затем понял, что, если их синтезировать в нормальной атмосфере, они будут упругими, как крошечные мячики. Теперь Дедал ищет способ оставлять в оболочках этих молекул небольшие «окошки», благодаря чему они могли бы погло-

щать молекулы внешней среды или обмениваться своим содержимым со средой, действуя как исключительно эффективные молекулярные сита. Таким образом, они могли бы накапливать внутри себя молекулы внешней сферы в количестве, в сотни раз превышающем их собственный вес.

New Scientist, November 3, 1966

Из записной книжки Дедала

...В силу теоремы Эйлера невозможно построить многогранник с шестиугольными гранями, поскольку в этом случае было бы $V + G - P = 0$. В своей замечательной книге «Рост и форма» (*Growth and Form*, Cambridge University Press, p.708,738) Д'Арси Томпсон рассматривает эту задачу в применении к радиоляриям — микроскопическим морским обитателям, чьи известковые скелеты нередко имеют вид гексагональной сетки. Даже восхитительная в своей симметричности *Aulonia hexagona* (которую можно было бы рассматривать как увеличенное в 10^5 раз изображение полой графитовой молекулы, состоящей из 1200 атомов) имеет несколько нешестиугольных граней...