ФРАКТАЛЫ

Кандидат физико-математических наук
И. М. СОКОЛОВ

Объекты, которые мы теперь называем фракталами, впервые появились в воображении математиков начала нынешнего столетия. И тогда вряд ли могло прийти в голову, что в окружающей нас природе встретится что-нибудь похожее на эти необычные и изысканные кривые. И хотя в этой статье речь у нас пойдет в основном о физических системах, начать придется с маленького и очень нестрогого математического введения.

Самоподобные геометрические объекты

Самоподобной геометрической фигурой (телом) мы будем называть фигуру, которую можно разрезать на конечное число одинаковых фигур, подобных ей самой. Примеры — на рисунке 1· отрезок, равносторонний треугольник, квадрат, куб.

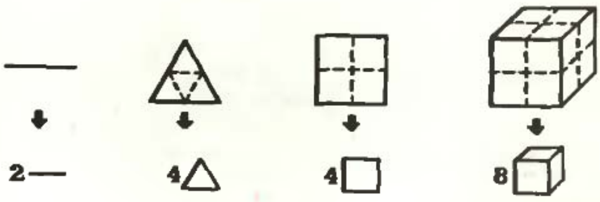


Рис. 1.

Несколько сложнее выглядит самоподобный объект на рисунке 2. Но строится он довольно просто. Начиная с равностороннего треугольника со стороной l_0 будем повторять (до бесконечности) следующий процесс: каждый отрезок, соединяющий вершины ломаной, разделим на три части и среднюю часть заменим двумя отрезками длиной $l/3$, где l — длина исходного отрезка. Первые несколько стадий построения такой кривой показаны на рисунке 2. На n-й стадии построения кривая представляет из себя ломаную из $\mathcal{N} = 3N = 3 \cdot 4^n$ отрезков длиной $l_0/3^n$ каждый, полная ее длина

$$L = 3l_0(4/3)^n.$$

Эту ломаную называют триадической кривой Коха (по имени шведского математика, придумавшего этот объект).

Каждый исходный отрезок триадической кривой Коха состоит из четырех подобных ему отрезков с втрое меньшим расстоянием между концами.

Самоподобными являются и объекты, показанные на рисунке 3,— так называемые треугольная кривая Серпинского и универсальная кривая Серпинского — «ковер Серпинского» (по имени польского математика В. Серпинского (1882—1969)). Способ их построения ясен из рисунка: первая получается при многократном соединении середин сторон соответствующих равносторонних треугольников, вторая — при бесконечном повторе-

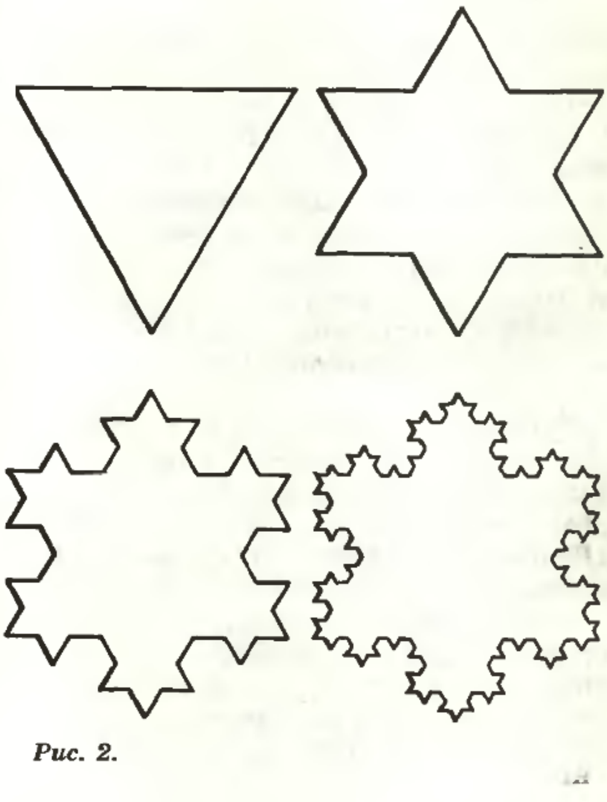


Рис. 2.

нии процедуры выбрасывания середины из разделенного на 9 частей квадрата.

Вернемся к кривой Коха. Попробуем, например, определить ее длину с помощью циркуля. Установив раствор циркуля равным λ, будем переставлять циркуль по кривой, считая число его перестановок n. Длина кривой при этом приближенно будет равна $L \approx \lambda n$. Величину λ мы будем называть масштабом измерения.

Измеряя, скажем, длину окружности с радиусом $R = 1$ м, мы получим, что измеренная длина $L = \lambda n$ при $\lambda = 1$ м равна 3,0 м, при $\lambda = 0{,}1$ м $L = 6{,}2$ мм, при $\lambda = 0{,}01$ м $L = 6{,}28$ м, и при $\lambda \to 0$ длина L стремится к пределу $2\pi R = 6{,}28318...$ м.

Попытавшись проделать аналогичную процедуру с кривой Коха, мы убедимся в отсутствии того предела, который можно было бы считать длиной этой кривой. Выбирая масштаб $\lambda = l_0/3^n$, мы получим, что измеренная длина кривой будет равна длине ломаной, соответствующей n-й стадии ее построения — $L = 3l_0(4/3)^n$.

Попытки измерить длины других самоподобных кривых привели бы к аналогичному результату — с уменьшением масштаба измерения длина кривой неограниченно растет.

Отметим один весьма важный фактор, отличающий реальный самоподобный объект от идеального математического: у реальных объектов существует минимальный масштаб измерения $\lambda_{\min}$.

Рассмотрим, например, реальный процесс построения кривой Коха с помощью карандаша и бумаги. Пусть мы строим кривую с начальной длиной стороны $l_0 = 1$ м карандашом, оставляющим линию толщиной $a_0 = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м. С математической точки зрения процедура построения кривой может продолжаться бесконечно. Реальный же процесс остановится, как только длина отрезка между двумя соседними точками излома сравняется с толщиной линии. Нетрудно подсчитать, что это произойдет на шаге с номером $n = \ln(l_0/a_0)/\ln 3 \approx 9$. Длина нашей линии при этом будет $L \approx 40$ м. Так что реальная самоподобная кривая имеет конечную длину.

Теперь вернемся к идеальным математическим объектам. Формулу длины кривой Коха можно записать в таком виде:

$$L = A\lambda^{-\alpha}, \text{ где } A = 3l_0^{\ln 4/\ln 3}, \ \alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3} - 1.$$

(Надеемся, вы сами, зная правила обращения с логарифмами, сможете убедиться, что эта запись эквивалентна формуле $L = 3l_0(4/3)^n$.) Фигурирующий в формуле показатель α связан с размерностью кривой.

Что такое размерность?

Существует несколько определений размерности, соответствующих совершенно разным понятиям. Попробуем составить представление о некоторых из них.

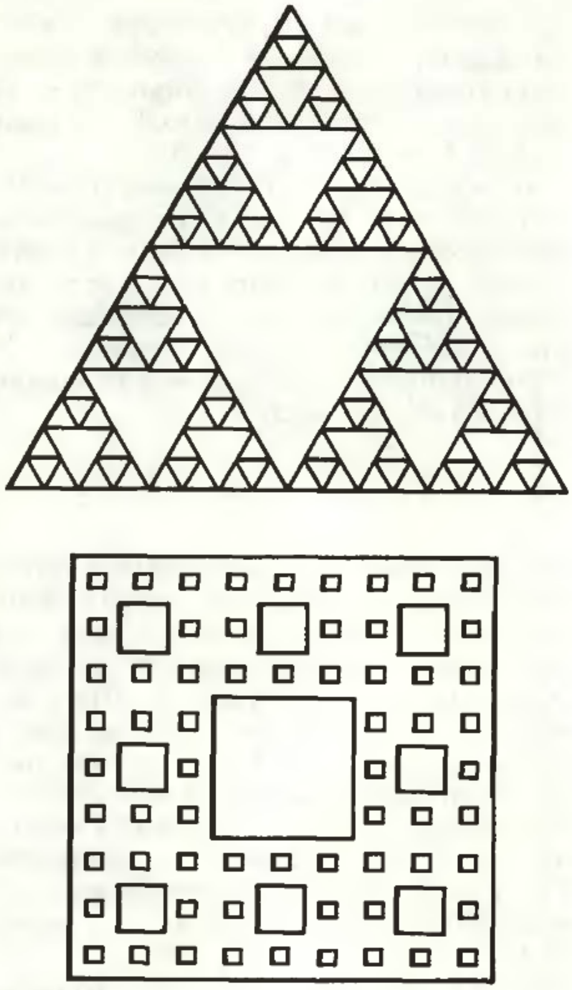


Рис. 3.

Первое определение связано с минимальным числом координат, необходимых для однозначного определения положения точки. В нашем пространстве это число равно трем, на плоскости достаточно двух координат, на линии — всего одной. В этом смысле пространство трехмерно, плоскость двумерна, линия одномерна. Естественно, в таком определении размерность всегда является целым числом.

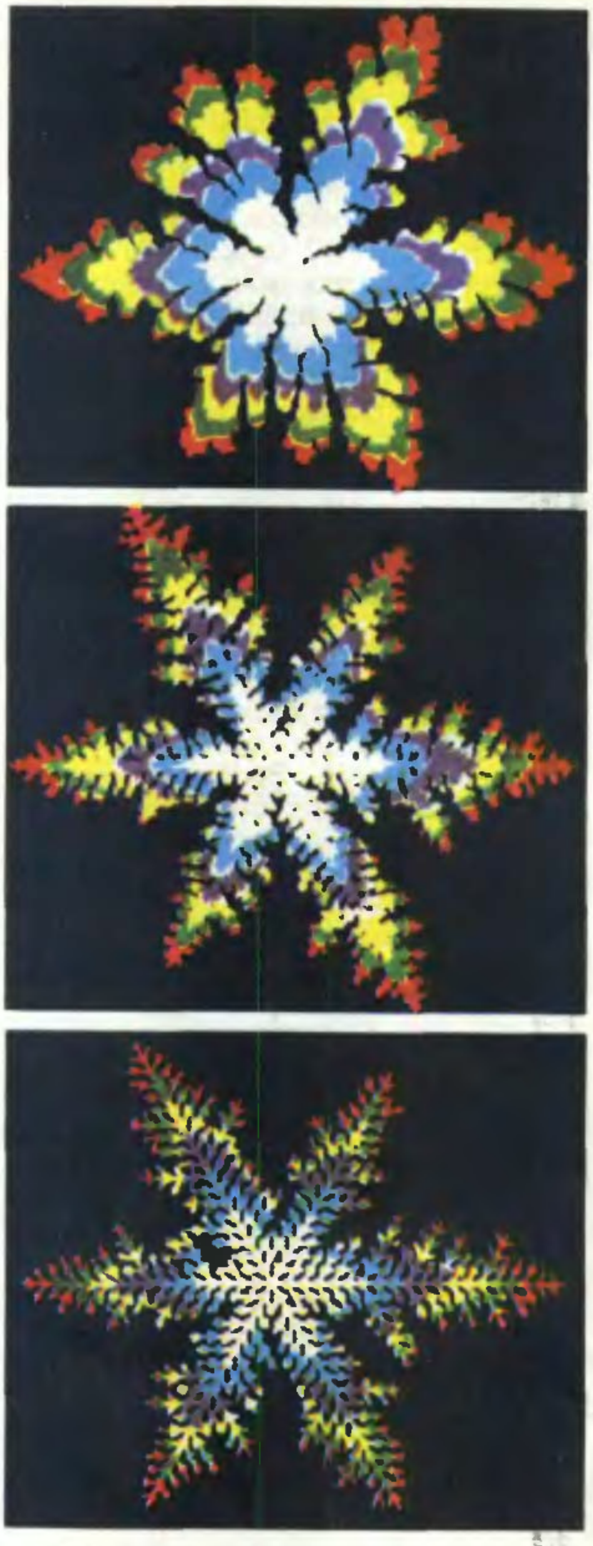
Второе определение связано со следующим обстоятельством. Чтобы разрезать прямую на две части, достаточно исключить одну точку. Множество, состоящее из конечного (счетного) числа точек, будем считать нульмерным. Размерность любого множества будем полагать на единицу большей, чем размерность разреза, делящего его на две несвязанные части. При таком определении размерности линия одномерна, плоскость (для разрезания которой необходимо провести разрез по некоторой линии) двумерна, объемное геометрическое тело трехмерно. Эта размерность — ее называют топологической — также может быть только целой.

Перейдем теперь к третьему, самому интересному для нас определению размерности, точнее — к определению целого класса близких по смыслу понятий размерности. Простейшее из них — размерность самоподобия.

Размерность самоподобия D можно определить формулой

$$D = \frac{\ln N}{\ln n},$$

где N — число одинаковых частей, на которые разбивается данный самоподобный объект, имеющих в n раз меньший пространственный размер. Посмотрите на рисунок 1. Проведя, как показано на рисунке, разрезы, мы разделим квадрат на $N=4$ квадрата со стороной, меньшей исходной в $n=2$ раза. Кубик со стороной 1 состоит из $N=8$ кубиков со стороной 1/2 ($n=2$). Так что размерность самоподобия для квадрата равна $\ln 4/\ln 2 = 2$, для кубика — $\ln 8/\ln 2 = 3$; очевидно, что размерность отрезка равна 1.



Рост «снежинок» на дисплее ЭВМ при разных условиях.

Вычисляя таким же образом размерности объектов, показанных на рисунках 2 и 3, мы увидим, что размерность каждого участка кривой Коха (и размерность всей кривой) равна $D=\ln 4/\ln 3=1{,}2618$, треугольной кривой Серпинского — $\ln 3/\ln 2 = 1{,}5849$, «ковра Серпинского» — $\ln 8/\ln 3 = 1{,}8727$. Эти странные кривые имеют нецелую размерность.

А теперь вернемся к формуле длины кривой Коха. Воспользовавшись только что приведенным определением размерности D, мы можем переписать эту формулу в виде

$$L=3l_0^D\lambda^{1-D}.$$

Рост измеренной длины самоподобной кривой при уменьшении масштаба измерения является показателем ее нецелой размерности:

$$D=1+\alpha.$$

Как измерить размерность?

Размерность самоподобия можно определить только для очень регулярных, построенных по строго определенным правилам, объектов. Если отклонения от регулярности невелики, объект можно считать приблизительно самоподобным. А если велики?

Воспользуемся еще одним определением размерности, которым часто

Реальная снежинка.

пользуются при экспериментальном измерении размерности различных физических систем.

Пространство, в котором расположен интересующий нас объект, раз-

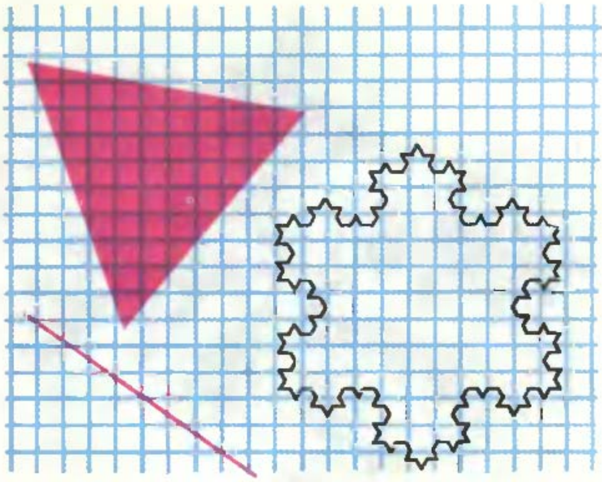


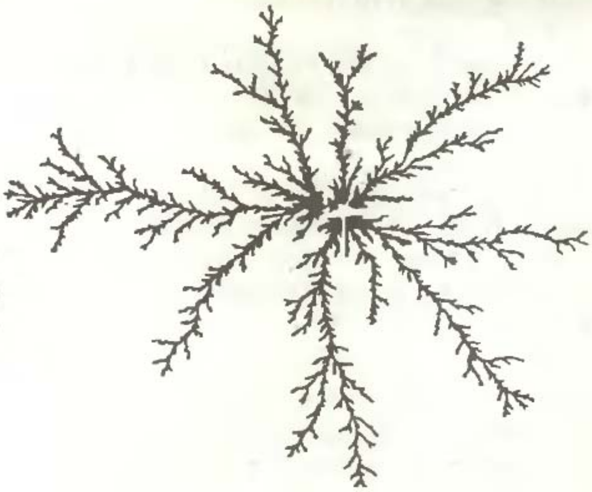
Рис. 4.

бивают на клетки размером λ (например, наносят на плоскость фотографии объекта квадратную сетку со стороной λ). Подсчитывают число клеток, в которые попали точки объекта. Разбиение повторяют, используя меньший масштаб $\lambda'<\lambda$ и т. д. (рис. 4). Зависимость числа клеток, в которые попали точки объекта, от размера клетки при этом дается законом $N = A\lambda^{-D}$, где D и есть искомая размерность. Рассматривая плоскую область площади S (треугольник на рис. 4), нетрудно убедиться, что $N \approx S/\lambda^2$, так что $D = 2$. Для отрезка $N = BL/\lambda$, где L — длина отрезка, а B — коэффициент, зависящий от его ориентации. Размерность отрезка $D = 1$. Если проделать ту же процедуру и с объектами, показанными на рисунках 2 и 3, получатся значения D, совпадающие с их размерностью самоподобия. Для определения размерности реальных объектов рисуют график зависимости $\ln N$ от $-\ln \lambda$. Этот график изображается прямой линией, тангенс угла наклона которой дает нам значение D.

«Фрактальная геометрия Природы»

В 1961 году вышла работа английского исследователя Л. Ричардсона (1881—1953), посвященная измерению длин береговых линий. Автором было установлено, что измеряемая длина побережья растет с уменьшением масштаба измерения по закону

Фрактальный кластер, возникающий при моделировании на ЭВМ диффузионно-контролируемой агрегации.



Фрактальный кластер цинка на электроде в гальванической ванне.

$L = A\lambda^{-\alpha}$ (закон Ричардсона), где показатель α составляет, например, для западного побережья Британии 0,24, а для побережья Австралии — 0,13. И хотя этот закон очень напоминал формулы длин самоподобных кривых, работа Ричардсона существовала сама по себе. Имелось и некоторое количество других физических примеров, «выходящих» на самоподобные объекты. Но все было разрознено...

Существенное изменение произошло с появлением книги французского математика Бенуа Мандельброта (ныне работающего в США), вышедшей в 1975 году на французском и в 1977 году на английском языке. Книга собрала воедино множество этих математических и физических примеров, сделав их достоянием научного обихода. Но главной заслугой Мандельброта было то, что он придумал, как все это называется.

Читатель, вероятно, помнит, что основным вкладом Атоса в развитие событий, описанных в романе Дюма «Двадцать лет спустя», было изобретение названия операции — «Семейное дело». Этот вклад считался равноценным шпаге д' Артаньяна и деньгам Портоса. Придумать хорошее название — большая заслуга.

Для объектов дробной размерности, точнее — для объектов, фрактальная размерность которых больше их топологической размерности, Мандельброт придумал название «фрактал». Слово это происходит от латинского fractus — дробный, изрезанный. Один весьма остроумный человек перевел это название на русский язык словом «дробняк».

Первая книга Мандельброта называлась «Фракталы: форма, случай, размерность». Вторая, вышедшая в 1982 году, называлась уже так: «Фрактальная геометрия Природы». Это название как нельзя лучше отражает реальную ситуацию.

Фрактальными свойствами обладают многие географические объекты — океанские и морские побережья, реки, горы и горные ущелья. Границы государств, если только они следуют естественным ориентирам, а не проведены линейкой на карте и лишь потом определены на местности (как, например, граница между Египтом и Суданом),— тоже фракталы. Длина границы между Португалией и Испанией (приведенная в португальском справочнике) и длина границы между Испанией и Португалией (приведенная в испанских официальных сведениях) отличается на 20 %, поскольку при их измерении использованы различные масштабы. Это еще раз подтверждает, что понятие длины для фрактальных кривых является не слишком осмысленным.

Оказалось, что кривые, подобные кривой Коха, в природе составляют скорее правило, чем исключение. Понятно, что самоподобие реальных, естественных объектов нарушается случайными отклонениями от строгой регулярности. Например, разные участки побережья не одинаковы, а лишь похожи друг на друга. И всем реальным системам свойственно наличие минимального масштаба измерения. Эти обстоятельства должны приниматься во внимание при анализе физической ситуации.

Для того чтобы можно было говорить о фрактальных свойствах системы, необходимо, чтобы различие минимального и максимального масштабов было достаточно большим. Если речь идет о морском или океанском побережье, то максимальный масштаб l_0 будет порядка 1000 км $= 10^6$ м, а минимальный, определяемый непостоянством границы из-за набегающих волн, приливов и отливов и т. д., — порядка 1 — 10 м. Эти масштабы отличаются в миллион (!) раз.

Еще один пример фрактальных кривых — видимые границы облаков. Разница минимального и максимального масштабов здесь еще больше, чем в случае побережий: имеются данные об облаках размером от сотен метров с видимыми деталями порядка метра до размера Земли (циклональные области). Размерность границы облака равна $D = 1{,}35$.

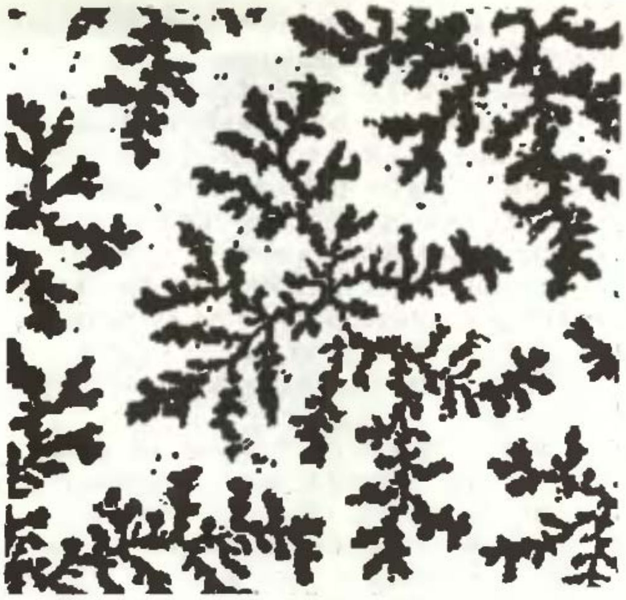
Пока мы рассматривали в основном лишь фрактальные кривые — сильно извилистые линии, похожие на кривую Коха, причем наши географические примеры имели скорее курьезный характер. Существует множество физических процессов, приводящих к возникновению более сложных и важных фрактальных структур.

Многие из вас, вероятно, выращивали кристаллы из насыщенного раствора. Если раствор не слишком пересыщен и достаточно хорошо перемешивается, то из подвешенной на ниточке затравки вырастает красивый кристалл правильной формы. Кристалл растет из-за того, что в своем тепловом движении какие-то молекулы подходят к тем местам на его поверхности, где они могут «прилипнуть», заняв наиболее выгодное с энергетической точки зрения положение. Конечно, большинство молекул попадает в не совсем подходящие места, однако рано или поздно они снова переходят в раствор или расплав из-за недостаточной связи с остальным кристаллом. В результате такого равновесного роста получается кристалл без внутренних пустот, с идеально гладкими плоскими гранями.

При отсутствии равновесия между кристаллизацией и растворением (т. е. при быстрой кристаллизации из сильно пересыщенного раствора или при кристаллизации из газовой фазы) появляются кристаллы совсем другого вида. Вы, конечно, видели нарастающую на морозильник холодильника снежную шубу или морозные узоры на окнах. Эти довольно рыхлые образования возникают из-за осаждения содержащейся в воздухе воды. Сначала образуются отдельные скопления молекул — так называемые кластеры; постепенно разрастаясь и соединяясь, кластеры и образуют узоры. Условия, сходные с теми, что имеют место при росте кластеров, существуют и при росте снежинок в облаке.

Такой процесс роста, называемый диффузионно-контролируемой агрегацией, приводит к возникновению кристалликов фрактальной формы — дендритов. Фрактальная размерность дендритных кристаллов определяется конкретными механизмами их роста. В зависимости от взаимодействия образующих кристалл молекул и от размера самого кристалла дендрит может быть случайной, неправильной формы или, напротив, казаться идеально правильной фигурой, как хорошо знакомые всем снежинки. В действительности о правильной форме снежинок можно говорить лишь на достаточно больших масштабах (на размерах самой снежинки), а на малых масштабах никакой регулярности нет — это отражает те случайные процессы, которые привели к их образованию.

Существование минимального масштаба (который в этом случае может



Реальный кластер, образующийся при конденсации $NbGe_2$ *на холодную подложку.*

быть порядка или много больше размера молекулы) приводит к тому, что полное число молекул в кристалле (или масса кристалла) зависит от его размера по закону $N_{молекул} \sim M \sim l^D$. По зависимости массы дендритных кристаллов от их размера можно, таким образом, определить их размерность.

Очень похожие на дендритные кристаллы фигуры возникают при электрическом пробое диэлектриков. Если сильная электрическая искра ударяет в диэлектрическую пластинку, на ее поверхности остается отчетливо видимый узор — так называемые фигуры Лихтенберга (по имени немецкого физика-экспериментатора Г. Лихтенберга (1742—1799), открывшего эти фигуры). Сходство фигур Лихтенберга и дендритных кристаллов не случайно — их возникновение в теории описывается похожими уравнениями.

Фрактальная размерность есть очень важная и доступная измерению характеристика физической системы. Эта величина может быть также вычислена с помощью различных теоретических моделей. Сравнение измеренного и вычисленных значений позволяет решить, какая из этих моделей лучше. Кроме того, при расчете физических свойств фрактальных систем (например, упругости снега и других рыхлых материалов) можно пользоваться специально разработанным для этого случая математическим аппаратом.

Фрактальными свойствами обладают многие системы, давно используемые для вполне практических целей. Например, поверхность активированного угля, используемого в качестве сорбента (поглотителя) в противогазах, является фрактальной. Размерность этой поверхности больше 2: она имеет чрезвычайно большую (формально — бесконечную, в том же смысле, в каком бесконечна длина кривой Коха) площадь и выемки всех масштабов, способные поймать и надежно удержать частицу любого размера — от пылинки до большой молекулы. Фрактальной является также поверхность многих используемых в химии твердых катализаторов. Их каталитическая активность зависит от фрактальных свойств поверхности, которые определяются способом приготовления и обработки.

Мы познакомились с большим количеством обладающих нецелой размерностью объектов. Хочется задать вопрос — а трехмерно ли само пространство, в котором мы живем? На этот вопрос можно дать вполне конкретный ответ. Дело в том, что фрактальная размерность пространства определяет вид многих привычных нам физических законов. Например, показатель степени 2 в знаменателе закона Кулона $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ есть на деле

Фигура Лихтенберга.

Фигура Лихтенберга, смоделированная на ЭВМ.

$D - 1$, где D — фрактальная размерность пространства. Анализ данных по проверке физических законов, вид которых зависит от размерности пространства, показал, что его размерность отличается от 3 не более, чем на 10^{-10}. Наше пространство действительно «очень трехмерно».

Вместо заключения

История изучения фрактальных систем довольно поучительна. Появившись вначале как игра ума чистых математиков, эти объекты мало интересовали естествоиспытателей. Одновременно с этим существовало некоторое количество малопонятных фактов (типа неизмеримости длины береговой линии), не слишком важных, чтобы привлечь общее внимание, и не слишком интересных, чтобы исследовать их ради них самих. Число таких фактов растет, но они по-прежнему остаются малоинтересными и разрозненными. Затем всему этому дается общее название — фрактал, и вскоре (а прошло всего около 10 лет) в физике начинается целый «фрактальный бум». Один из ученых даже назвал фракталы инфекцией конца двадцатого века.

Во-первых, оказалось, что мы окружены такими системами и сталкиваемся с ними чуть ли не каждый день. Во-вторых, многие свойства таких объектов весьма необычны. Не понимая этих свойств, нельзя понять даже таких простых вещей, как форма облаков или снежинок. В-третьих, все оказалось сложнее, чем представлялось вначале: фрактал должен описываться не одной своей фрактальной размерностью, а целым набором, спектром разных размерностей, каждая из которых становится равной размерности евклидова пространства, как только мы переходим от фракталов к обычным телам. Разные свойства фрактальных систем зависят от разных размерностей. В-четвертых, в-пятых, ... в-десятых — новые вопросы возникают быстрее, чем даются ответы на старые.

Этап накопления вопросов прошли многие теории, прежде чем приобрести стройность и завершенность. Так что у фракталов еще всё впереди.

Сергей Алексеевич Чаплыгин

(Начало см. на с. 2)

впоследствии, когда докладчик тщательно проверил свои вычисления, выяснилось, что Сергей Алексеевич был действительно прав. Подобных легенд ходило великое множество.

Осенью 1941 года правительство решило перевести ЦАГИ в Казань и Новосибирск. Чаплыгин стал руководить Новосибирским филиалом ЦАГИ. В кратчайший срок ему удалось развернуть напряженную работу на новом месте. Снова разрабатывались проекты и строились аэродинамические лаборатории, велась интенсивная научная работа. Но годы и перенесенные болезни все больше и больше дают себя чувствовать. 8 октября 1942 года Сергей Алексеевич скончался.

Имя Сергея Алексеевича Чаплыгина продолжает жить в трудах его учеников, в работах всех ученых, развивающих и обобщающих его идеи.