УЗОРЫ ПЕНРОУЗА И КВАЗИКРИСТАЛЛЫ

Доктор физико-математических наук
В. Е. КОРЕПИН

В этой статье рассказано о математике квазикристаллов — материалах нового типа, открытых в 1984 г. Их физическому открытию предшествовало создание занятных (и совершенно элементарных!) математических моделей — узоров Пенроуза — двумерных аналогов квазикристаллических структур. Поначалу эти конструкции воспринимались как изящные безделушки, но в настоящее время уже опубликовано несколько сот серьезных научных статей по физике и математике квазикристаллов. Так что читателям «Кванта» здесь представляется редкая в наши дни возможность: изучив вполне элементарный, почти развлекательный материал, приобщиться к стремительно развивающейся новой области науки.

Речь пойдет о замощении плоскости. *Замощение* — это покрытие всей плоскости неперекрывающимися фигурами. Вероятно, впервые интерес к замощению возник в связи с построением мозаик, орнаментов и других узоров. Известно много орнаментов, составленных из повторяющихся мотивов.

Одно из простейших замощений приведено на рисунке 1. Плоскость покрыта параллелограммами, причем все параллелограммы одинаковы. Любой параллелограмм этого замощения можно получить из розового параллелограмма, сдвигая последний на вектор $n\vec{u}+m\vec{v}$ (векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ определяются ребрами выделенного параллелограмма, n и m — целые числа). Следует отметить, что все замощение как целое переходит в себя при сдвиге на вектор $\vec{u}$ (или $\vec{v}$). Это свойство можно взять в качестве определения: именно, *периодическим замощением с периодами* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ назовем такое замощение, которое переходит в себя при сдвиге на вектор $\vec{u}$ и на вектор $\vec{v}$. Периодические замощения могут быть и весьма замысловатыми, некоторые из них очень красивы. Примером может служить периодическое замощение, придуманное голландским художником М. Эшером (см. рис. 5 на с. 4)

Квазипериодические замощения плоскости

Существуют и интересные непериодические замощения плоскости. В 1974 г. английский математик Роджер Пенроуз открыл *квазипериодические* замощения плоскости. Свойства этих замощений естественным образом обобщают свойства периодических.

Пример такого замощения приведен на рисунке 2. Вся плоскость покрыта ромбами. Между ромбами нет промежутков. Любой ромб замощения с помощью сдвигов и поворотов можно получить всего из двух. Это *узкий ромб* (36°, 144°) и *широкий ромб* (72°, 108°), показанные отдельно на рисунке 3. Длина сторон каждого из ромбов рав-

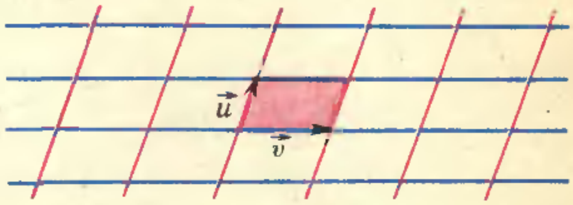


Рис. 1.

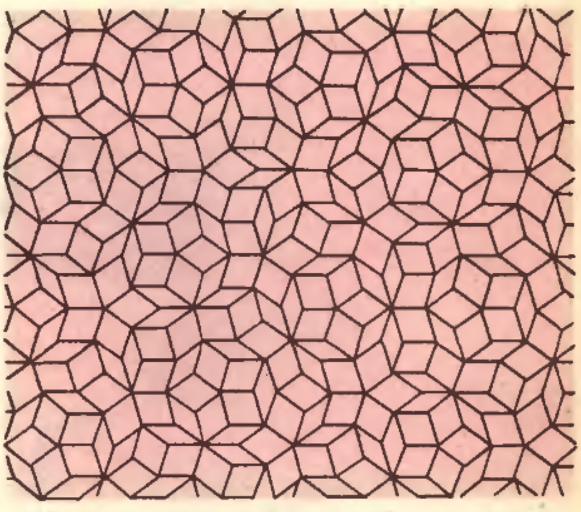


Рис. 2. Пример Р. Пенроуза квазипериодического замощения плоскости ромбами двух типов.

на 1. Это замощение не является периодическим — оно очевидно не переходит в себя ни при каких сдвигах. Однако оно обладает неким важным свойством, которое приближает его к периодическим замощениям и заставляет называть его *квазипериодическим.* Дело в том, что *любая конечная часть квазипериодического замощения встречается во всем замощении бесчисленное множество раз.*

Любопытно отметить, что это замощение обладает осью пятого порядка (переходит в себя при повороте на угол 72° вокруг некоторой точки), в то время как таких осей у периодических замощений не существует (не очень простое доказательство последнего факта мы опускаем).

Другое квазипериодическое замощение плоскости, построенное Пенроузом, приведено на рисунке 4. Вся плоскость покрыта четырьмя многоугольниками специального вида. Это звезда, ромб, правильный пятиугольник и «бумажный кораблик». Самый известный пример квазипериодического замощения приведен на первой и на второй страницах обложки. Пенроузу удалось покрыть всю плоскость цыплятами двух типов.

Преобразование инфляции и дефляции

Каждый из показанных выше трех примеров квазипериодического замощения — это покрытие плоскости с помощью сдвигов и поворотов конечного количества фигур. Это покрытие не переходит в себя ни при каких сдвигах, любая конечная часть покрытия встречается во всем покрытии бесчисленное множество раз, притом, «одинаково часто» по всей плоскости.

Замощения, описанные выше, обладают некоторым специальным свойством, которое Пенроуз назвал *инфляцией.* Изучение этого свойства позволяет разобраться в структуре этих покрытий. Более того, инфляцию можно использовать для построения узоров Пенроуза.

Наиболее наглядным образом можно проиллюстрировать инфляцию на примере *треугольников Робинсона.* Треугольники Робинсона — это два равнобедренных треугольника P, Q с углами (36°, 72°, 72°) и (108°, 36°, 36°) соответственно и длинами сторон, как на рисунке 6 (с. 4). Здесь τ — золотое сечение: $\tau=(1+\sqrt{5})/2$.

Эти треугольники можно разрезать на меньшие, так, чтобы каждый из новых (меньших) треугольников был подобен одному из исходных. Разрезание показано на рисунке 7: прямая ac является биссектрисой угла dab, а отрезки ae, ab и ac равны. Легко видеть, что треугольники acb и ace равны между собой и подобны треугольнику P, а треугольник cde подобен треугольнику Q. Треугольник Q разрезан так. Длина отрезка gh равна длине отрезка ih (и равна 1). Треугольник igh подобен треугольнику P, а треугольник igf подобен треугольнику Q. Линейные размеры новых треугольников в τ раз меньше чем у исходных. Такое разрезание называется *дефляцией.*

Обратное преобразование — склеивание — называется *инфляцией.* Рисунок 7 показывает, что из двух P-треугольников и одного Q-треугольника можно склеить P-треугольник, а из P- и Q-треугольника можно склеить Q-треугольник. У новых (склеенных) треугольников линейные размеры в τ раз больше, чем у исходных треугольников.

Итак, мы ввели понятия преобразований инфляции и дефляции. Ясно, что преобразование инфляции можно

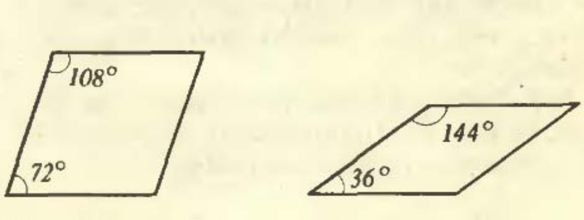


Рис. 3.

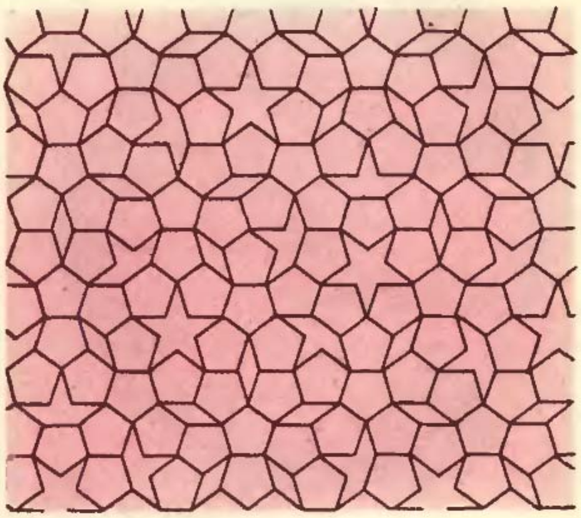


Рис. 4. Квазипериодическое замощение плоскости многоугольниками четырех типов.

Рис. 5. «Всадники» М. Эшера — пример периодического замощения плоскости.

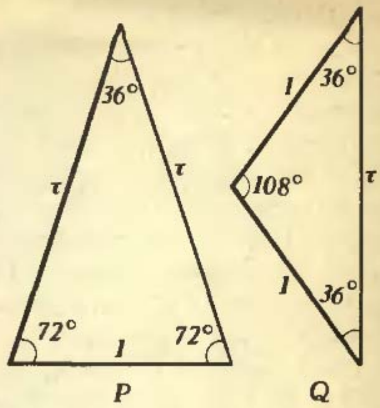


Рис. 6.

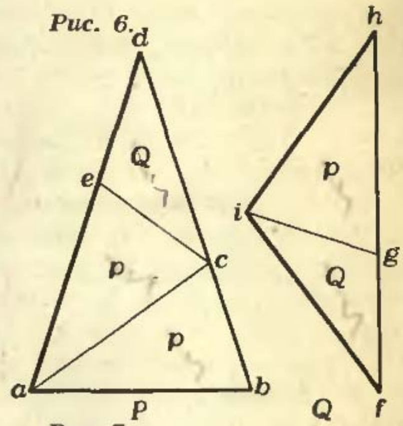


Рис. 7.

повторить; при этом получится пара треугольников, размеры которых в τ^2 раз больше исходных. Последовательно применяя преобразование инфляции, можно получить пару треугольников сколь угодно большого размера. Таким образом можно замостить всю плоскость.

Можно показать, что описанное *замощение треугольниками Робинсона не является периодическим.*

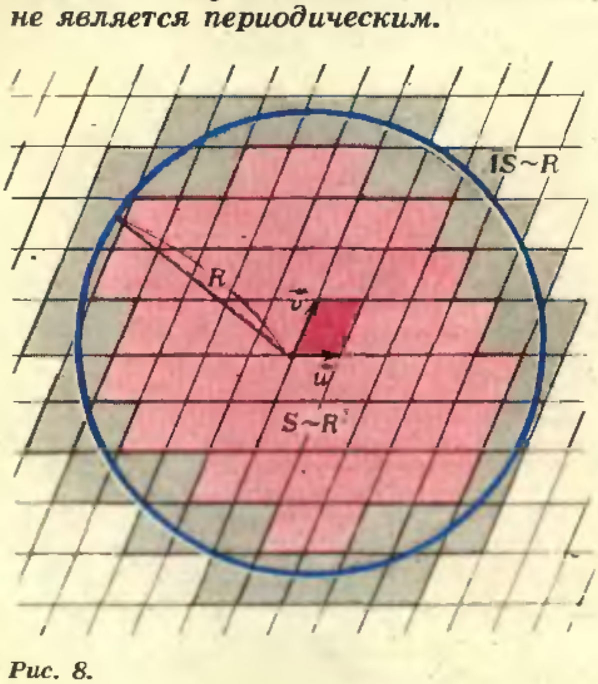


Рис. 8.

Наметим доказательство этого утверждения. Будем рассуждать от противного. Предположим, что замощение плоскости треугольниками Робинсона периодическое с периодами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Покроем плоскость сетью параллелограммов со сторонами $\vec{u}$, $\vec{v}$ (см. рис. 1). Обозначим через p число P-треугольников, у которых левая нижняя вершина (относительно нашей сети) расположена в заштрихованном параллелограмме; аналогично определим число q. (Отобранные $p+q$ треугольники образуют так называемую ***фундаментальную область*** данного периодического замощения.) Рассмотрим круг радиусом R с центром O. Обозначим через p_R (соответственно q_R) число P-треугольников (соответственно — Q-треугольников), лежащих внутри этого круга.

Можно доказать, что

$$\lim_{R\to\infty}(p_R/q_R)=p/q. \qquad (1)$$

Действительно, число треугольников, пересекающих о к р у ж н о с т ь радиуса R, пропорционально R, в то время как число треугольников внутри к р у г а радиуса R пропорционально R^2. Поэтому в пределе отношение числа P-треугольников к числу Q-треугольников в круге равно этому отношению в фундаментальной области (рис. 8).

Возьмем теперь наше замощение и выполним преобразование дефляции. Тогда в исходной фундаментальной области окажется $p'=2p+q$ меньших P-треугольников и $q'=p+q$ меньших Q-треугольников (см. рис. 7). Обозначим через p'_R и q'_R число меньших треугольников в круге радиуса R. Теперь легко получить противоречие. В самом деле,

$$\frac{p}{q}=\lim_{R\to\infty}\frac{p_R}{q_R}=\lim_{R\to\infty}\frac{p'_R}{q'_R}=\frac{p'}{q'}=\frac{2p+q}{p+q},$$

откуда, решая уравнение $p/q=(2p+q)/(p+q)$, находим

$$p/q=(1+\sqrt{5})/2,$$

в то время как p и q — целые! Противоречие показывает, что замощение треугольниками Робинсона — не периодическое.

Оказывается, что это покрытие треугольниками Робинсона не единственное. Существует бесконечно много различных квазипериодических покрытий плоскости треугольниками Робинсона. Грубо говоря, причина этого явления лежит в том, что при дефляции биссектрису на рисунке 7 можно провести из вершины b, а не из вершины a. Используя этот произвол, можно добиться, например, чтобы покрытие треугольниками превратилось в покрытие ромбами, показанное на рисунке 2. Покрытия цыплятами также порождается треугольниками Робинсона.

Преобразование дуальности

Способ построения квазипериодических замощений, приведенный выше, выглядит как догадка. Однако существует регулярный способ построения квазипериодических покрытий. Это метод *преобразования дуальности*, идея которого принадлежит голландскому математику де Брауну.

Поясним этот метод на примере построения замощения плоскости ромбами (см. рис. 3). Сначала построим *сетку G*. Для этого возьмем правильный пятиугольник и пронумеруем его стороны ($j=1, 2, 3, 4, 5$; рис. 10). Рассмотрим сторону с номером j. Построим бесконечный набор прямых, параллельных этой стороне, так, чтобы расстояние между двумя ближайшими прямыми равнялось 1. Проведем аналогичное построение для каждой из сторон пятиугольника; прямые мы проведем так, чтобы они пересекались лишь попарно. Получится набор прямых, который не является периодическим (рис. 9). Прямые в этом наборе будем обозначать буквами l. Перенумеруем прямые двумя индексами: $l_j(n)$. Здесь j указывает на направление прямой (какой стороне пятиугольника она параллельна). Целое число n нумерует различные параллельные прямые, пробегает все целые значения (как положительные, так и отрицательные). Этот набор прямых делит плоскость на бесконечный набор многоугольников. Эти многоугольники называются *гранями* сетки. Стороны многоугольников будем называть *ребрами* сетки, а вершины многоугольников — *вершинами* сетки. (Аналогично для квазипериодического покрытия Q: ромбы — это грани Q, стороны ромбов — ребра Q, вершины ромбов — вершины Q.)

Таким образом, сетка G построена.

Совершим теперь преобразование *дуальности*. Каждой грани сетки G сопоставим вершину квазипериодического покрытия Q (вершину ромба). Вершины обозначим буквами $\vec{v}$ (это векторы). Сначала сопоставим каждой грани M сетки пять целых чисел $n_j(M)$, $j=1, 2, ..., 5$ по следующему правилу. Внутренние точки грани M лежат между какой-то прямой $l_j(n)$

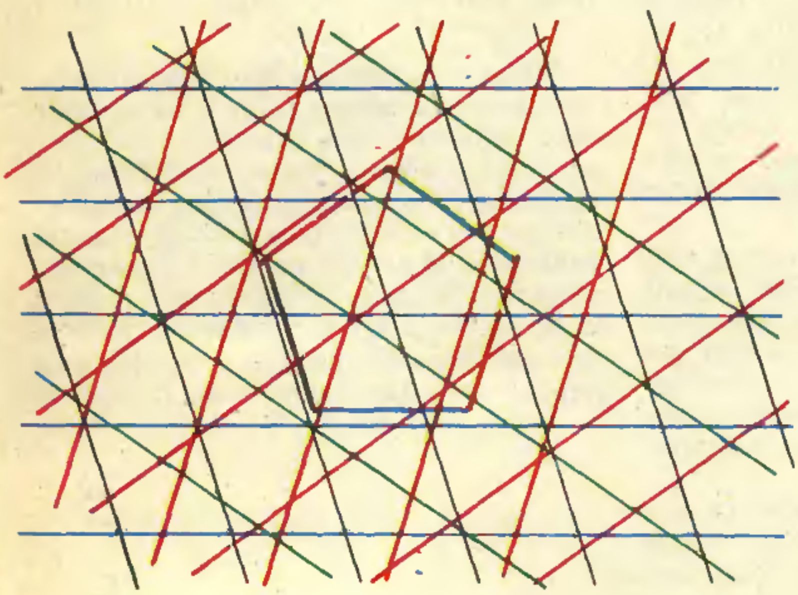


Рис. 9.

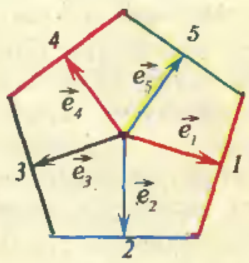


Рис. 10.

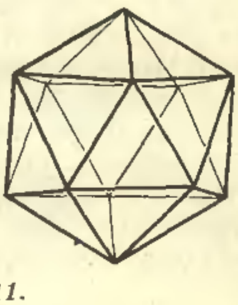


Рис. 11.

и параллельной ей прямой $l_j(n+1)$. Это целое число n мы сопоставим грани M. Поскольку в сетке есть прямые пяти направлений, то таким образом мы сопоставим пять целых чисел $n_j(M)$ каждой грани M сетки G. Вершина $\vec{v}$ квазипериодического покрытия Q, соответствующая данной грани M сетки G, строится так:

$$\vec{v}(M)=n_1(M)\vec{e}_1+n_2(M)\vec{e}_2+...+n_5(M)\vec{e}_5.$$

Здесь $\vec{e}_j$ — вектор единичной длины, направленный из центра правильного пятиугольника к середине стороны с номером j. Таким образом, каждой грани сетки мы сопоставили вершину покрытия. Так можно построить все вершины Q.

Теперь некоторые вершины соединим между собой отрезками прямых линий. Это будут ребра покрытия Q (стороны ромбов). Для этого рассмотрим пару граней M_1 и M_2, имеющих общее ребро. Вершины покрытия, соответствующие этим граням ($\vec{v}$ (M_1) и $\vec{v}(M_2)$), мы и соединим между собой отрезками.

Тогда оказывается, что разность

$$\vec{v}(M_1)-\vec{v}(M_2) \qquad (2)$$

может быть равна лишь одному из десяти векторов $\pm\vec{e}_j$. (Мы этот факт доказывать не будем.)

Таким образом, каждому ребру сетки сопоставляется ребро покрытия Q. Каждой вершине сетки сопоставляется грань покрытия Q (ромб). Действительно, к каждой вершине сетки примыкают четыре грани M_k $(k=1, 2, 3, 4)$. Рассмотрим соответствующие им четыре вершины покрытия $\vec{v}$ (M_k). Из свойства разности (2) следует, что ребра покрытия, проходящие через эти вершины, образуют границу ромба. Квазипериодическое покрытие плоскости ромбами построено.

Мы проиллюстрировали метод преобразования дуальности. Это общий способ построения квазипериодических покрытий. В этой конструкции правильный пятиугольник можно заменить на любой правильный многоугольник. Получится новое квазипериодическое покрытие.

Метод преобразования дуальности применим и для построения квазипериодических структур в пространстве.

Квазипериодическое заполнение трехмерного пространства

Существует трехмерное обобщение узоров Пенроуза. Трехмерное пространство может быть заполнено параллелепипедами специального вида. Параллелепипеды не имеют общих внутренних точек и между ними нет промежутков. Каждый параллелепипед этого заполнения с помощью сдвигов и поворотов может быть получен всего из двух параллелепипедов. Это так называемые параллелепипеды Аммана-Маккэя. Для того, чтобы задать параллелепипед, достаточно задать три ребра, выходящих из одной вершины. Для первого параллелепипеда Аммана-Маккэя эти векторы имеют вид:

$$\vec{e}_1=(0;\ 1;\ \tau),\ \vec{e}_2=(-\tau;\ 0;\ -1),$$
$$\vec{e}_3=(\tau;\ 0;\ -1),$$

а для второго параллелепипеда:

$$\vec{e}_4=(0;\ -1;\ \tau),\ \vec{e}_5=(\tau;\ 0;\ 1),$$
$$\vec{e}_6=(0;\ 1;\ \tau).$$

Заполнение этими параллелепипедами не переходит в себя ни при каких сдвигах, однако любая конечная его часть встречается во всем заполнении бесчисленное множество раз. Заполнение пространства этими параллелепипедами связано с симметриями *икосаэдра* (эти симметрии невозможны у периодического замощения пространства). Икосаэдр — это платоновское тело (правильный многогранник). Каждая из его граней является правильным треугольником. Икосаэдр имеет 12 вершин, 20 граней и 30 ребер (рис. 11).

* * *

Оказалось, что именно такими симметриями обладает быстро охлажденный алюминиево-марганцевый расплав $Al_{0.86}Mn_{0.14}$ (открытый в 1984 г.). Таким образом узоры Пенроуза помогли понять структуру вновь открытого вещества. И не только этого вещества: найдены и другие реальные квазикристаллы, их экспериментальное и теоретическое изучение находится на переднем крае современной науки.

Новости науки

Антипротон в ловушке

Еще сто лет назад многие не верили в реальность существования атомов. «То, чего нельзя увидеть, не может существовать» — примерно такой аргумент считался неоспоримым. Теперь он кажется просто нелепым, поскольку не только атомы, но даже и отдельные элементарные частицы стали сейчас реальными объектами исследований.

Счетчики в лабораториях регистрируют нейтроны, фотоны, электроны и т. п. Установки, составленные из большого числа специальных детекторов, скрытых высоко в горах, фнксируют нейтрино, прилетающие к нам из космоса. Но физики могут не только считать количество частиц, они научились их изучать, так сказать, поштучно.

Если бы вам кто-нибудь предложил посадить один электрон в банку, вы, естественно, приняли бы это за шутку. Тем не менее такая задача разрешима, и это уже умеют делать в лабораториях. Рассказывают, что как-то к Эдисону пришел изобретатель и сказал, что он может синтезировать универсальный растворитель, который способен растворять все на свете. «Это очень-очень здорово,— сказал Эдисон,— но в чем вы будете хранить Вашу замечательную жидкость?». Так и с электроном. Ясно, что он не сможет жить в сосуде, даже если там создать максимально возможный вакуум, — электрон просто «прилипнет» к стенке.

И все же электрон, а также и антиэлектрон — позитрон — хранить можно, причем хранить долго. Ловушку для электрона или позитрона можно создать с помощью электрического и магнитного полей. В магнитном поле электрон движется по окружности или спирали. Электрическое поле, созданное в конденсаторах специальной формы, не дает заряженной частице убежать по спирали. Комбинируя оба поля, можно «поймать» заряженную частицу. Такого типа устройство называют ловушкой или западней Пеннинга — по имени изобретателя*). Современный рекорд хранения электронов и позитронов в этой ловушке — около 10 месяцев. У пойманного таким способом позитрона удалось измерить массу и магнитный момент.

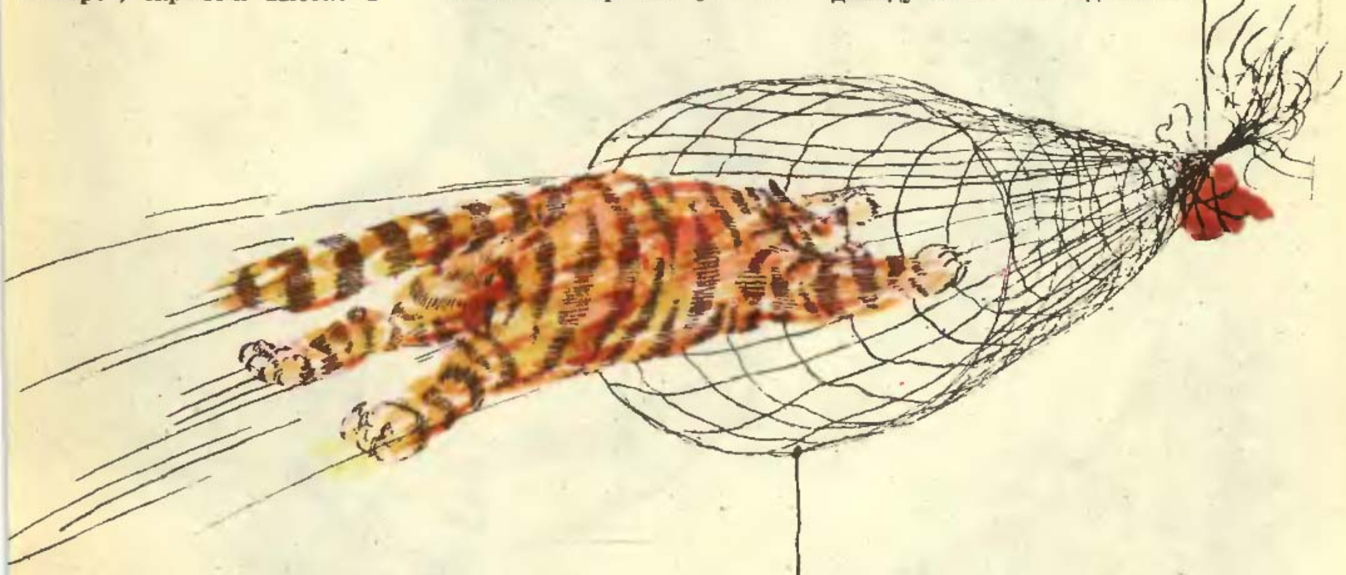
Теперь дошла очередь и до антипротона. Как и всякая античастица, антипротон исчезает (аннигилирует), столкнувшись со своим антиподом — протоном. Лишь в ловушке, где никого нет, «жизни» антипротона ничто не угрожает. Однако поймать его в ловушку не так-то просто. Дело в том, что антипротон рождается в ускорителе со скоростью, почти равной скорости света, и такую быструю частицу удержать очень трудно.

Тем не менее задача поимки антипротона разрешима. Сейчас научились тормозить его движение, снижая энергию от нескольких ГэВ (10^9 эВ) до нескольких десятков кэВ (10—30 тысяч эВ). При таких энергиях антипротон уже удается посадить в ловушку Пеннинга, в которой он совершает колебательные движения — как тигр в клетке — с большой частотой, но выскочить наружу не может.

В первых опытах антипротон удерживался в ловушке несколько часов. Физики считают, что срок «заточения» можно увеличить в сотни раз. Тогда станет возможным индивидуальное «обследование» этой частицы: точное измерение ее массы, магнитного момента и т. п. Наконец, можно будет «подсадить» в ловушку позитрон и сделать антиатом — антиводород.

Можно придумать и много других интересных опытов, надо только преодолеть трудности, которых осталось еще немало. Ученые надеются, что «антипротон в ловушке» скоро будет привычным экспонатом в физической лаборатории.

Я. С.



*) Пеннинг Франс Мишель (1894—1953) — нидерландский физик.