Задача (Моторчик, 5 баллов)**.** При изучении строения клеточной стенки были обнаружены биомолекулярные моторы F_1 — АТФ-аза и АТФ-синтаза, способные превращать энергию химических связей молекулы АТФ в энергию вращательного движения. В ходе эксперимента (ссылка) удалось прикрепить к вращающейся оси мотора пропеллер из никеля и пронаблюдать его вращение. Затем экспериментаторы вычисляли крутящий момент τ по формуле

$$\tau = 4\pi\eta\omega(L_1^3 + L_2^3)[3\,\mathrm{acosh}(h/r)]^{-1},$$

полученной теоретически.

Здесь η — вязкость среды, в которой вращается пропеллер, ω — угловая скорость вращения, L_1 и L_2 — расстояния от точки прикрепления пропеллера до его концов, h — высота подставки , на которой стоял пропеллер, r — половина ширины пропеллера, acosh — функция, обратная *гиперболическому косинусу* $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Пользуясь формулой, найдите, на каком расстоянии от конца должен быть прикреплён пропеллер длины 750 нм и ширины 150 нм к подставке высоты 200 нм, чтобы он вращался с частотой 8 Гц, а крутящий момент был равен 20 пН · нм? Эксперимент проводится в среде вязкости 10^{-3} Па · с.

Решение. Более подробное описание эксперимента можно найти в книге [1], а мы только приведём вычисления. Обозначим через L длину пропеллера. Тогда $L_2 = L - L_1$ и $S_q = L_1^3 + L_2^3 = L^3 - 3L^2L_1 + 3LL_1^2$ (в справедливости второго равенства легко убедиться, если перенести L_1^3 в правую часть и заметить, что $L^3 - 3L^2L_1 + 3LL_1^2 - L_1^3 = (L-L_1)^3 = L_2^3$). По условию задачи, это выражение равно

$$S_q = \frac{3\tau \operatorname{acosh}(h/r)}{4\pi\eta\omega},$$

то есть выражается через данные в условии величины. Для нахождения L_1 осталось решить квадратное уравнение $3LL_1^2 - 3L^2L_1 + L^3 - S_q = 0$ относительно L_1. Его дискриминант равен $D = 9L^4 - 12L(L^3 - SQ) = 12LS_q - 3L^4$. Следовательно, меньший корень уравнения равен:

$$L_1 = \frac{3L^2 - \sqrt{12LS_q - 3L^4}}{6L}.$$

Найдём теперь $u = \operatorname{acosh}(h/r)$. Можно или воспользоваться калькулятором, или снова составить квадратное уравнение:

$$e^u + e^{-u} = 2h/r$$

$$re^{2u} - 2he^u + r = 0$$

$$e^u = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - r^2}}{r}.$$

Поскольку мы ищем положительное значение u, выбираем больший корень:

$$e^u = \frac{h + \sqrt{h^2 - r^2}}{r}.$$

$$u = \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - r^2}}{r} = \ln \left(\frac{h}{r} + \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2 - 1} \right) \approx 1{,}64.$$

Будем выражать длины в нм, силы — в пН, а время — в секундах. Тогда $1\text{Па} \cdot \text{с} = 10^{-6} \frac{\text{пН} \cdot \text{с}}{\text{нм}^2}$ и $\eta = 10^{-9} \frac{\text{пН} \cdot \text{с}}{\text{нм}^2}$.

Теперь

$$S_q = \frac{3\tau u}{4\pi\eta\omega} \approx 1{,}55 \cdot 10^8 \text{ нм}^3$$

и

$$L_1 = \frac{3L^2 - \sqrt{12LS_q - 3L^4}}{6L} \approx 226 \text{ нм}$$