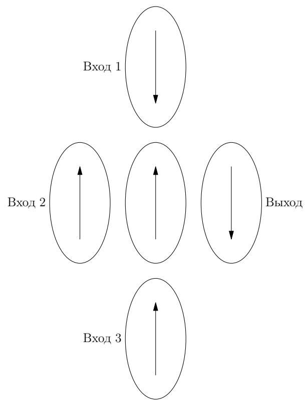
Задача (Меньшинство)**.** На рис. 1 изображена схема из наномагнитов, реализующая функцию меньшинства, и таблица истинности этой функции (то есть какие значения эта функция принимает при указанных значениях входов; стрелочка «вверх» соответствует значению 1, стрелочка «вниз» – значению 0). На рис. 2 показано, как при помощи такой схемы реализовать логическую операцию «И». Нарисуйте схему, реализующую

(а, 4) функцию большинства для 7 входных элементов(то есть на выходе должно получаться то из значений входов, которое встречается чаще);

(б, 4) сложение двух двухзначных чисел в двоичной записи (то есть на входе должны быть четыре цифры этих двух чисел, а на выходе – цифры суммы этих чисел).

В каждом из пунктов участники, использовавшие меньше всего элементов, получат 2 дополнительных балла.

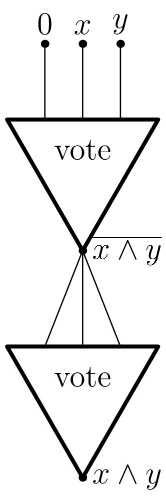


(a) Устройство

Вход 1	Вход 2	Вход 3	Выход
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(b) Таблица истинности

Рис. 1: Функция меньшинства



(a) Схема

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b) Таблица истинности

Рис. 2: Функция «И» ($\wedge$)

Решение. (а) Для получения операции «ИЛИ» ($\vee$) достаточно в приведённой в условии схеме «0» заменить на «1». Отрицание реализуется нижней частью этой схемы. Требуемая функция большинства равна

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \bigvee_{1 \le i < j < k < l \le 7} x_i \wedge x_j \wedge x_k \wedge x_l,$$

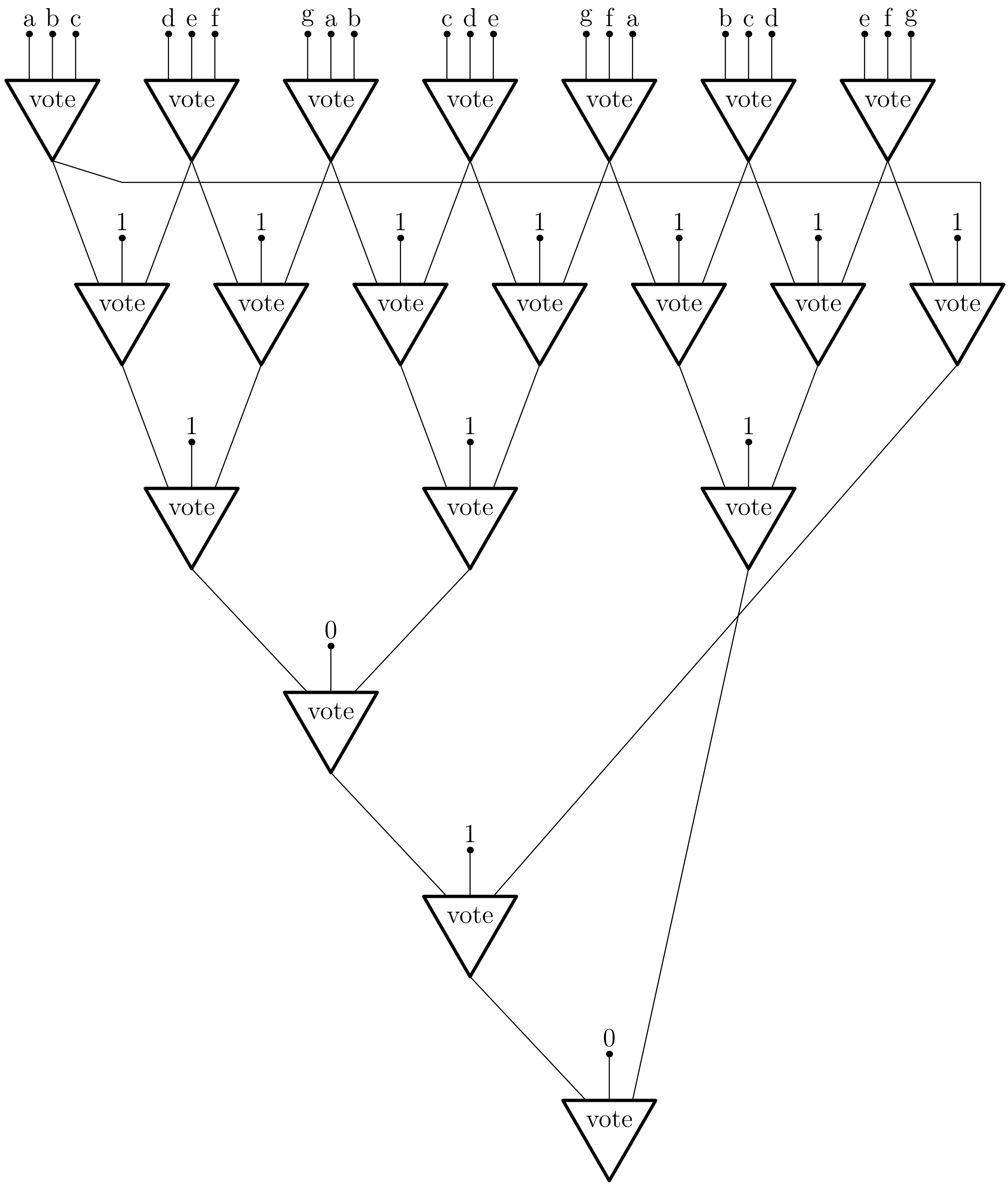
то есть выражается через уже использованные операции.

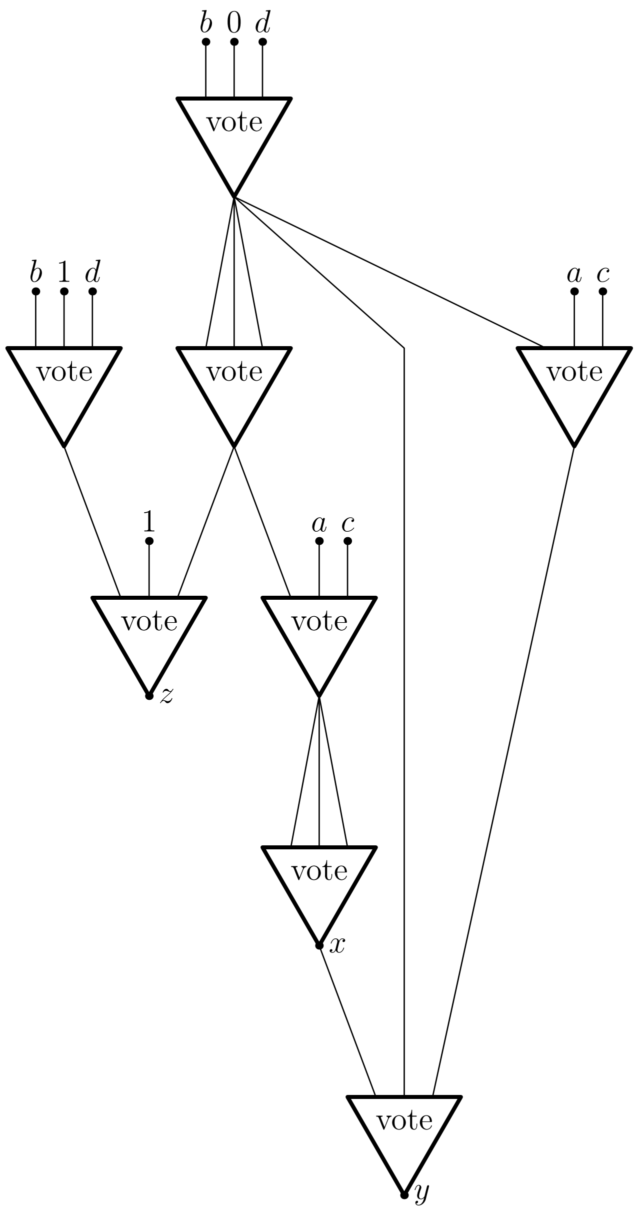
(б) Аналогично предыдущему пункту, достаточно выразить сложение через $\wedge$, $\vee$ и $^{-}$. Но цифры суммы $z_1 z_2 z_3$ чисел $x_1 x_2$ и $y_1 y_2$ равны:

$$z_3 = (x_2 \wedge \overline{y_2}) \vee (\overline{x_2} \wedge y_2)$$
$$z_2 = ((x_1 \wedge y_1 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{y_1}) \wedge x_2 \wedge y_2) \vee ((x_1 \wedge \overline{y_1} \vee \overline{x_1} \wedge y_1) \wedge \overline{x_2 \wedge y_2})$$
$$z_1 = (x_1 \wedge y_1) \vee (y_1 \wedge x_2 \wedge y_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge y_2)$$

Разумеется, полученные таким образом схемы не минимальны.

Приведём наиболее оптимальные из схем, предложенных школьниками. Обе схемы предложены ученицей 8-го класса Астрелиной Анной Андреевной.


a b c
d e f
g a b
c d e
g f a
b c d
e f g
vote
1
0



Здесь $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{xyz}$.