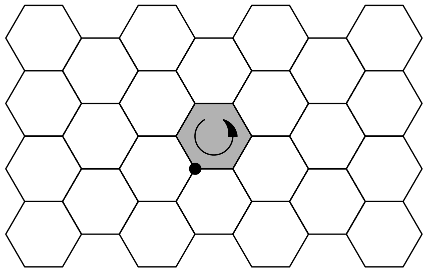
Задача (Близорукий наноробот)**.** Решётку графена, в которой один из атомов заменён на изотоп ^{13}C, обрабатывает наноробот. За один ход он может перейти к одному из соседних атомов, после чего узнаёт, приблизился ли он к изотопу. Кроме того, он способен понять, изотоп ли он сейчас обрабатывает. Как ему найти изотоп не более, чем за (а, 8) 2 000 000 шагов; (б, 4) 1 000 015 шагов (в, 6) 1 000 006 шагов, если изначально изотоп находится в миллионе шагов от робота?

При решении одного из пунктов этой задачи засчитываются и предыдущие (и баллы за решённые пункты суммируются).

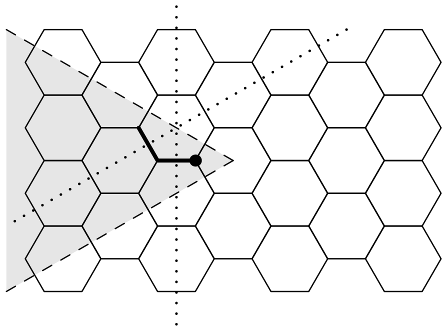
Решение. Заметим, что при каждом ходе мы узнаём, в какой полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к шагу находится изотоп. Будем называть ход *удачным*, если он приближает нас к изотопу, и *неудачным* в противном случае.

Следующую лемму мы докажем в конце решения, а пока будем пользоваться без доказательства:

Лемма 1. *Маршрут, состоящий только из удачных ходов, оптимальный.*



Посмотрим на серый шестиугольник. Наша первая цель — поставить робота в его вершину, ближайшую к изотопу. Для этого будем действовать так. Сначала робот обходит шестиугольник в направлении, указанном стрелкой, до первого неудачного хода, и затем делает еще один ход «назад», «откатывающий» неудачный. Потом робот делает аналогичную операцию, начиная с другого направления[1]. В результате робот придёт в нужную вершину, сделав не более 4 лишних ходов.



Теперь мы стоим в «угловой» точке сектора в 60°, в котором находится изотоп. Сделаем один шаг по биссектрисе этого угла, а второй — перпендикулярно одной из сторон угла. На первом шаге мы заведомо приблизились к изотопу. Если на втором шаге мы тоже к нему приблизились, то эти два шага содержатся в одном из кратчайших путей к изотопу. Более того, мы снова оказались в «угловой» точке сектора в 60°, в котором находится изотоп. Если же на втором шаге мы удалились от изотопа, то изотоп находится в полоске, ограниченной серединным перпендикуляром ко второму ходу и стороной угла. После этого достаточно вернуться на один ход назад и идти вдоль этой полоски.

При таком алгоритме общее число «лишних» ходов не превосходит $4 + 2 = 6$.

Доказательство леммы Заметим, что если выбросить все рёбра, параллельные одному направлению, решётка распадётся на «змейки». Рассмотрим змейки, на которых лежат начальная точка и изотоп. Нам нужно перейти с одной из них на другую. Следовательно, в направлении, параллельном выброшенным ребрам, необходимо сделать хотя бы столько ходов (по выброшенным рёбрам), каково расстояние между соответствующими змейками. Осталось заметить, что любой удачный ход, параллельный некоторому направлению, уменьшает число, соответствующее этому направлению: серединный перпендикуляр как раз отделяет одни змейки от других.

[1] Идти только в одну сторону может оказаться недостаточно, если первый же ход — неудачный.