

# Фотонные кристаллы (решение) (физика)

## 1. Подход к описанию фотонных кристаллов.

Для описания фотонных кристаллов используется понятие разрешенных и запрещенных энергетических зон, хорошо известное в твердотельной электронике. В оптике твердого тела аналогичное понятие появилось в 1987 году, когда Эли Яблонович, ныне профессор Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе, ввел понятие запрещенной зоны для электромагнитных волн (фотонная запрещенная зона, electromagnetic band gap). Оказалось, что поведение фотона в фотонном кристалле с хорошей точностью можно описать как поведение электрона в обычных кристаллах, если приписать электрону определенную эффективную массу.

С общей точки зрения, фотонный кристалл является сверхрешеткой (crystal superlattice) - средой, в которой искусственно создано дополнительное «поле» (подобно тому, как электроны в обычном кристалле находятся в электрическом поле ядер атомов) с периодом, на порядок превышающим период основной решетки.

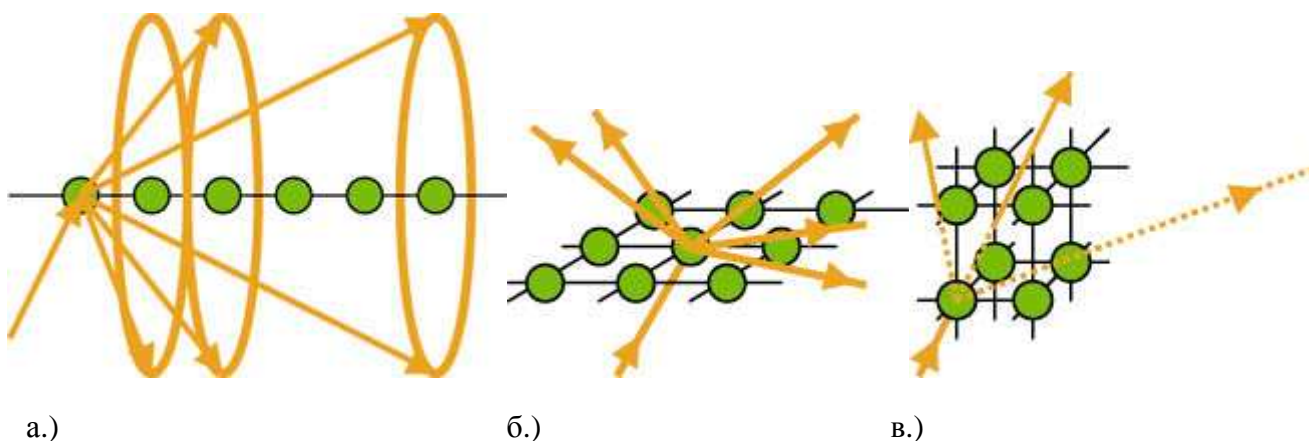
Для фотонов такое поле получают периодическим изменением показателя преломления среды – в одном, двух или трех измерениях (1D-, 2D-, 3D-фотонные структуры соответственно).

Если период оптической сверхрешетки сравним с длиной электромагнитной волны, то поведение фотонов кардинально отличается от их поведения в решетке обычного кристалла, узлы которого находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем длины волны света. Поэтому такие решетки и получили название «фотонные кристаллы».

## 2; 3. Одномерные, двумерные и трёхмерные фотонные кристаллы. Фотонная запрещенная зона.

Распространение излучения в фотонных кристаллах определяется условием максимума интерференции волн (при рассмотрении отражения света от кристаллографических плоскостей сверхрешетки его можно приближённо заменить условием Вульфа-Брэгга), рассеянных на разных узлах решетки, и зависит от угла между направлением волнового вектора и осями фотонного кристалла.

На рисунке схематично показана дифракция света на периодических структурах различной размерности. При рассеянии фотонов на 1D- и 2D-структурах всегда находятся такие направления распространения дифрагировавших лучей, для которых условие максимума интерференции выполнено. Для одномерного кристалла - нити (а), такие направления образуют конические поверхности, а в двумерном случае (б) - совокупность отдельных, изолированных друг от друга лучей.

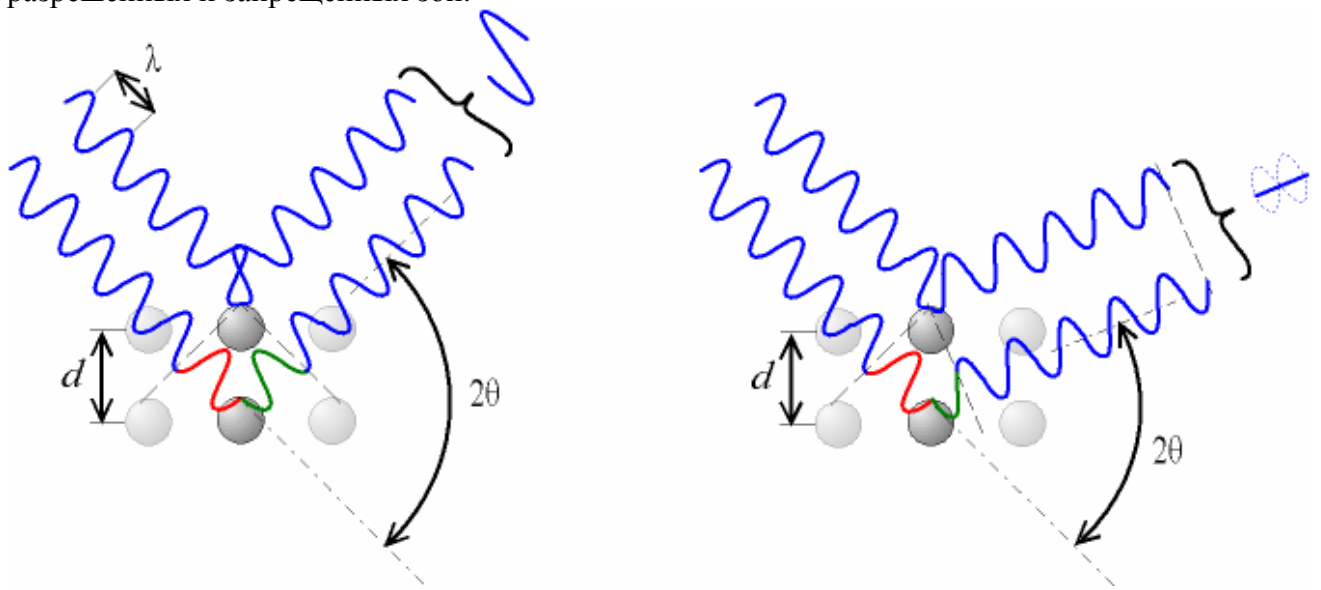


Трёхмерный случай (в) принципиально отличается от одномерного и двумерного тем, что **условие максимума интерференции для данной длины волны может оказаться**

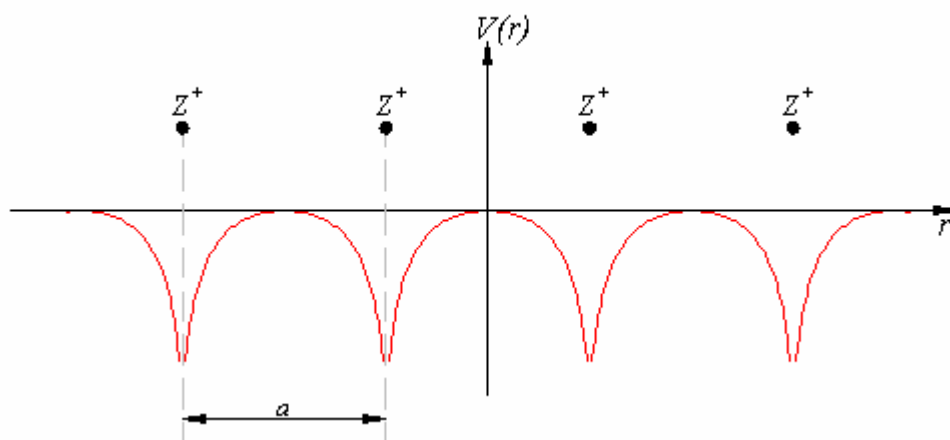
**невыполнимым ни для одного из направлений в пространстве.** Распространение фотонов с такими длинами волн в трехмерном кристалле невозможно, а **соответствующие им энергии образуют запрещенные фотонные зоны.**

Условие Вульфа-Брэгга (оно, впрочем, для данной задачи имеет характер лишь грубой оценки и интерпретации рисунков типа (а), (б) и (в) выше, приводимых в ряде популярных статей) имеет вид:  $2d \sin \theta = n\lambda$ , где  $d$ -межплоскостное расстояние (в случае фотонного кристалла – период сверхрешётки),  $\theta$ -угол скольжения падающего луча,  $n$ -порядок отражения,  $\lambda$ -длина волны. При выполнении этого условия волна отражается от плоскости.

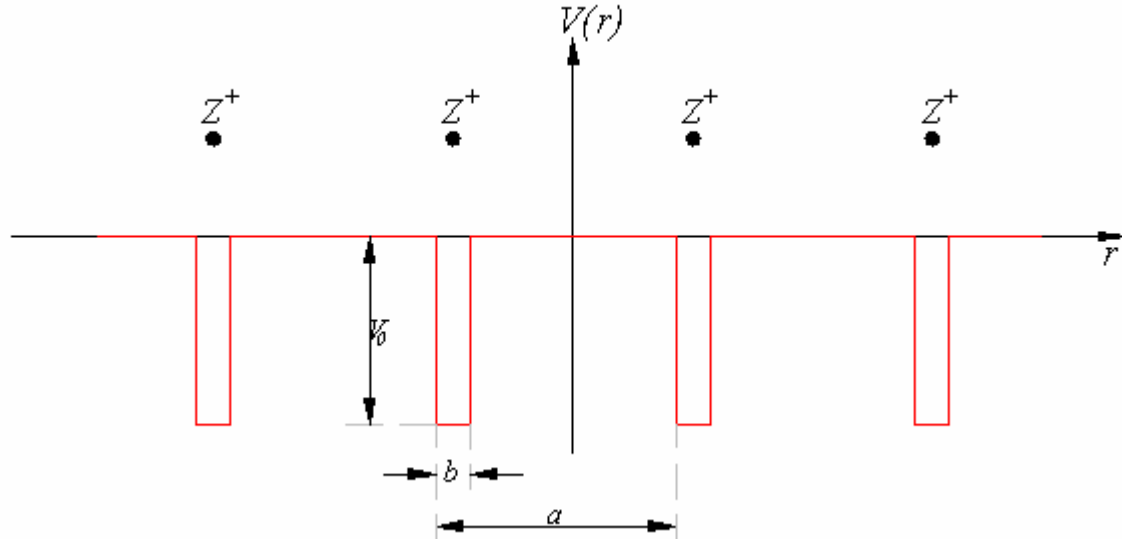
А при выполнении условия минимума  $2d \sin \theta = (n + \frac{1}{2})\lambda$  волна не отражается (полностью проходит сквозь данную плоскость). Этими условиями регулируется возможность прохождения или отражения волны в том или ином направлении, а следовательно – наличие разрешённых и запрещённых зон.



Для более точного нахождения разрешённых и запрещённых зон нужно провести аналогию с зонной теорией твёрдых тел. Основная задача (в одномерном случае) этой теории ставится так: рассматривается электрон в периодическом потенциале и для него решается уравнение Шредингера.



В самом простом случае потенциал можно считать прямоугольным (модель Кронига-Пенни)



или свести задачу к известной в квантовой механике задаче о дираковской гребёнке, которая является предельным случаем модели Кронига-Пенни при условиях  $b \rightarrow 0$ ,  $V_0 \rightarrow \infty$ ,  $V_0 b = \text{const}$ .

Условием существования решений (волновых функций) в этой задаче, как известно, является уравнение

$$\cos(ka) = \cos(\alpha a) - P \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \quad (1), \text{ где}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \alpha^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \beta^2 &= \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \\ P &= \frac{\beta^2 ab}{2} \end{aligned} \quad (2).$$

Решения существуют не для любых  $\alpha$  и  $\beta$ . Те значения параметров, при которых решений нет, определяют границы запрещённой зоны электронов. Их можно вычислить, учитывая, что левая часть (1) по модулю не больше единицы, и преобразуя правую часть методом вспомогательного угла.

Проведём теперь аналогию между этой моделью и фотонными кристаллами. Очевидно, что  $b$  – это период основной решётки, а  $a$  – период сверхрешётки. Параметр  $V_0$  определяет энергию взаимодействия фотона с веществом кристалла, приходящуюся на один узел сверхрешётки. Плотность энергии взаимодействия (в случае линейной среды) можно оценить как

$$\rho = -\vec{d}\vec{E} = -pE^2, \text{ где } d \text{ – дипольный момент единицы объёма, } p \text{ – поляризуемость среды.}$$

Тогда  $V_0 \approx \frac{pE^2}{n} \sim \frac{pE^2}{a^3}$ . В этой формуле  $E$  – напряжённость электрического поля фотонов в

кристалле, а в формулах (2)  $E$  – это энергия частицы («тяжёлого фотона»), то есть фотона, взаимодействующего с кристаллом. Из условия разрешимости (1), с учётом (2) и проведённой аналогии, можно оценить ширину и набор возможных положений запрещённой зоны.

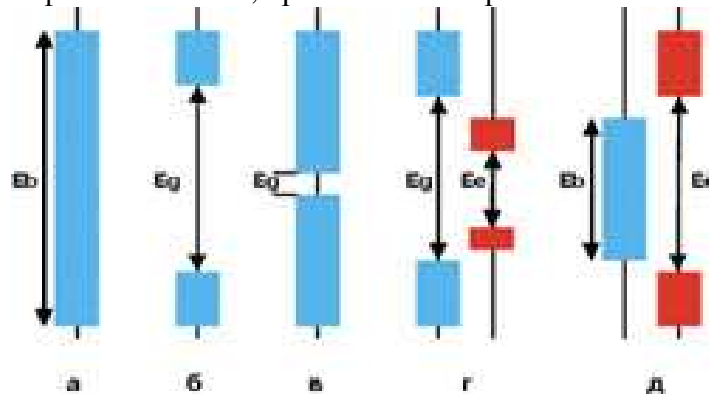
В более общем трёхмерном случае положение разрешённых и запрещённых зон определяется так называемыми зонами Бриллюэна. Возникновение запрещённых зон связано с тем, что для волн определённых длин на границе зоны Бриллюэна возникает условие

брэгговского отражения, и электронная волна отражается от границы зоны. Это равносильно тому, что возникает стоячая волна, и групповая скорость данной волны равна нулю.

#### 4. Фотонные проводники, полупроводники, сверхпроводники и изоляторы.

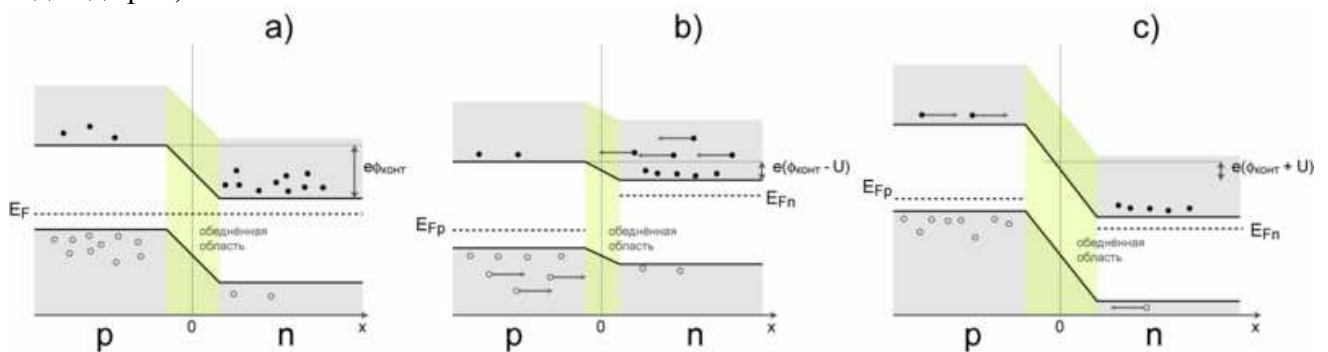
Фотонные проводники обладают широкими разрешенными зонами. Это прозрачные тела, в которых свет пробегает большое расстояние, практически не поглощаясь.

Фотонные изоляторы обладают широкими запрещенными зонами. Фотонные полупроводники обладают более узкими по сравнению с изоляторами запрещенными зонами. На следующем рисунке показано соотношение разрешенных и запрещенных энергетических зон, соответствующих различным случаям: **фотонного проводника (а), фотонного изолятора (б), фотонного полупроводника (в), подавителя спонтанного излучения (г) и фотонного идеального проводника (д)**. Здесь  $E_b$  - ширина разрешенной фотонной зоны,  $E_g$  - ширина запрещенной фотонной зоны,  $E_e$  - ширина запрещенной электронной зоны, голубым цветом показаны разрешённые фотонные зоны, красным - электронные.



#### 5. Фотонный диод и транзистор.

Чтобы объяснить возможные принципы их работы, продолжим аналогию с теорией твёрдого тела. Как известно, работа обычных диодов и транзисторов основана на p-n-переходе между двумя полупроводниками, один из которых имеет электронную проводимость, а другой – дырочную. На рисунке изображены энергетические диаграммы p-n-перехода (для электронов и для дырок).

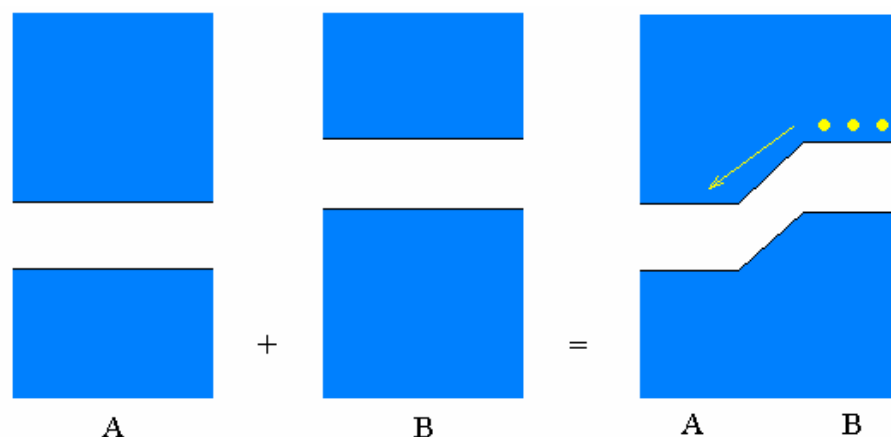


а.) Состояние равновесия (разность уровней энергии соответствует так называемой контактной разности потенциалов);

б.) При приложенном прямом напряжении (переход открыт);

в.) При приложенном обратном напряжении (переход закрыт).

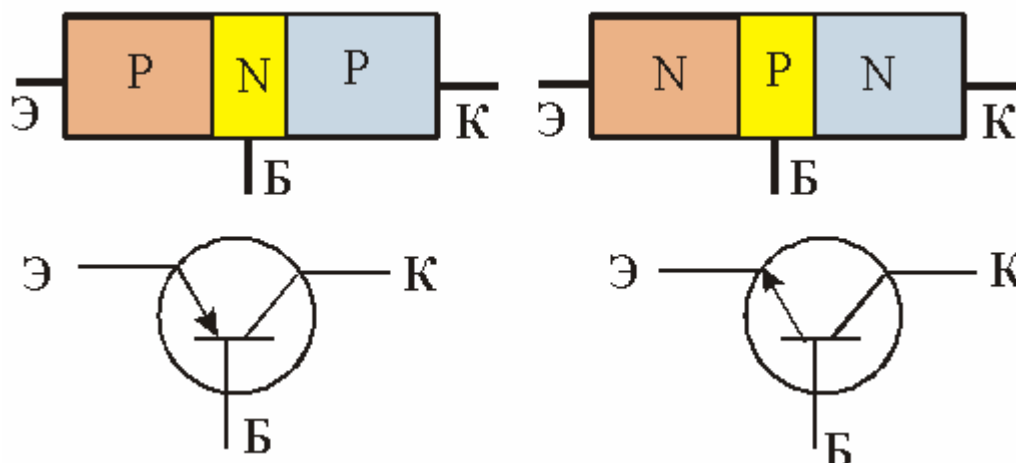
Как создать фотонный диод? Во-первых, это можно сделать просто соединением двух фотонных кристаллов-полупроводников (см. ответ на предыдущий вопрос) с различными положениями запрещенной зоны. На следующем рисунке показан переход между двумя такими кристаллами А и В.



При этом никакой приложенной разности потенциалов, как в случае электронного диода, нет, но направление из В в А является прямым (фотон легко проходит через переход в этом направлении), а из А в В – обратным (фотон не проходит через переход, если разность энергий взаимодействия фотона с кристаллом достаточно велика).

Но можно пойти ещё дальше и создать полный аналог электронного диода, в котором энергетическая диаграмма будет зависеть от «приложенного напряжения» (то есть, от разности концентраций фотонов в кристаллах А и В вблизи перехода). Предположим, что кристаллы представляют собой **нелинейную среду**, параметры которой (в частности, нижняя граница запрещённой зоны) зависят от концентрации фотонов. Пусть с ростом концентрации фотонов в материале А запрещённая зона понижается, а в материале В – повышается. Тогда, если фотоны распространяются из В в А (в прямом направлении), они при подходе к границе окажутся выше по энергии, чем граница запрещённой зоны в А, и переход будет энергетически выгодным. При распространении фотонов в обратном направлении произойдёт обратное: их уровень энергии в А понизится, и переход будет энергетически невыгодным (причём запирающий эффект усиливается с концентрацией).

Имея возможность создания фотонных диодов, можно создать и аналог транзистора в полном соответствии с электронным устройством. Как известно, транзистор состоит из двух р-п-переходов (или, во введенных нами для фотонных кристаллов обозначениях, А-В-переходов). Принципы работы фотонных транзисторов полностью аналогичны принципам работы электронных.



Одним из примеров работ являются исследования, проведенные в университете Торонто, в которых использовалась кремниевая реплика искусственного опала (если узлы обычного опала представляют собой огромные по атомным меркам шары, то узлами реплики будут того же размера шарообразные пустоты). Полученный кристалл не пропускал свет в узкой полосе длин волн от 1,38 мкм до 1,62 мкм. Дополнительные свойства ему придали, покрыв внутреннюю поверхность узлов - пустот - тонким слоем вещества с другим коэффициентом преломления. В Торонто для этого использовали жидкокристаллическую композицию, что позволило управлять положением запрещенной зоны с помощью магнитного и электрического полей и таким путем - манипулировать световыми потоками в кристалле.

### Преимущества.

В случае тяжелых фотонов, скорость которых можно понизить до необычайно малой величины, нелинейные процессы идут с большой эффективностью, и для реализации нелинейного режима требуется гораздо меньшая плотность излучения.

При распространении света в фотонных кристаллах не происходит диссипации энергии, как при прохождении тока в обычных проводниках. Другими словами, в таких кристаллах легко реализовать «фотонную сверхпроводимость». Это позволяет создать из фотонных транзисторов интегральные схемы с высокой плотностью упаковки элементов. В случае электронных устройств этому препятствует выделение тепла в схеме.

Ещё одно преимущество фотонных элементов – их быстродействие. Обычные сверхпроводники не могут работать при очень большой частоте переключения, так как она ограничена сравнительно малым значением ширины запрещенной зоны.

### 6. Световоды в фотонных кристаллах и управление световыми потоками.

Общий принцип работы световодов в фотонных кристаллах прост: световод представляет собой фотонный проводник, окружённый фотонным изолятором. Нежелательный выход света из такого проводника исключается тем, что уровень энергии фотона в проводнике приходится на запрещённую зону в изоляторе.

При управлении световыми потоками в фотонном кристалле важную роль играет нелинейность среды (об этом мы говорили выше). Управление потоками возможно за счёт:  
-Нелинейной зависимости поляризации или намагничённости среды от величины соответствующего поля (то есть, концентрация фотонов влияет на показатель преломления);  
-Нелинейной зависимости этих величин от внешних полей (электрического, т.е. от приложенного напряжения, или магнитного, т.е. от токов). Это позволяет создавать электронно-фотонные схемы.

### 7. Предельное снижение скорости фотона и предельная плотность информации.

Скорость фотона уменьшается тем больше, чем сильнее его когерентное взаимодействие с кристаллом и уменьшение длины волны. Но очевидно, что возможность уменьшения длины волны ограничена: фотон в кристалле нельзя сосредоточить в область, размеры которой меньше размера атома. Запишем связь между частотой и длиной волны (частота фотона при переходе из одной среды в другую не меняется):

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{v_{\min}}{\lambda_{\min}} \sim \frac{v_{\min}}{a_0}, \text{ откуда } v_{\min} \sim \frac{a_0}{\lambda} c.$$

Здесь  $a_0$  – боровский радиус,  $v_{\min}$  – минимальная скорость. Взяв длину волны из инфракрасного диапазона  $\lambda = 10000$  нм, получим:  $v_{\min} \sim 150$  м/с. То есть, учёные из Гарварда замедлили свет практически до предела.

Оценим предельную плотность информации. Из сделанной оценки следует, что при предельной плотности на один атом кристалла приходится в среднем один фотон. Если бы каждый фотон мог хранить один бит информации, то предельная плотность информации была бы равна концентрации атомов в кристалле  $n_0$ . В принципе, фотон может хранить один бит информации (например, если считывающее устройство фиксирует киральность фотона, левую или правую). Но в гарвардском эксперименте запись информации осуществлялась другим механизмом, и плотность информации определялась предельной частотой модуляции.

Модуляция предполагает наличие в волне такой концентрации фотонов, чтобы её можно было приближённо считать классической (а не квантовой волной вероятности). Это означает, что число фотонов в объёме, равном кубу длины волны (в вакууме, где происходит запись информации), много больше единицы. Но минимальный акт модуляции производится с цугом, равным одной длине волны, и в одном акте модуляции может записываться порядка 1 бита

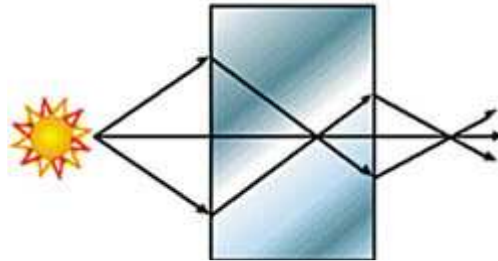
информации. Это означает, что предельная плотность записи информации равна  $n = \frac{n_0}{N}$ , где  $N$



– число фотонов в объёме, равном кубу длины волны (в вакууме). Число  $N$  можно оценить как отношение частоты волны к частоте модуляции. В описанном эксперименте  $N \sim 10^9$ , тогда как концентрация атомов имеет порядок  $n_0 \sim 20^3 \cdot 10^{27} = 10^{30} \text{ м}^{-3}$ . Значит, предельная плотность записи информации в таком эксперименте  $n \sim 10^{20} \text{ бит/м}^3$ .

#### 8. Отрицательный показатель преломления и суперлинза.

Отрицательный показатель преломления обусловлен свойством некоторых сред изменять киральность фотонов, падающих на границу этой среды. В обычных средах векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{k}$  образуют правую тройку, но на некоторых границах раздела сред киральность может меняться. Так происходит в описываемых кристаллах. Схема распространения света в простейшей модели «суперлинзы» (простая пластина) следующая:



Свет распространяется так, как будто выполняется закон Снеллиуса с отрицательным показателем преломления  $n$ . Он действительно полагается отрицательным, что согласуется с уравнениями Максвелла, из которых следует, что  $n = \pm \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$ , причём диэлектрическая и магнитная проницаемость среды в общем случае комплексны.

Для практической реализации такой необычной среды учеными Калифорнийского института (UCSD) была изготовлена структура, представляющая собой периодический набор расщепленных медных круговых резонаторов и проводов, полученных методом масочного травления в стеклянном волокне толщиной 0,25 мм (см. рис.). Результаты измерений дали величину показателя преломления  $n = -2,7 \pm 0,1$ .



**С помощью линзы из обычного материала (без дополнительных приспособлений) свет нельзя сфокусировать в область, много меньшую длины его волны, из-за различных видов абберации (в частности, дифракции и хроматической абберации).**

Что может произойти с фотоном, если его сфокусировать в область, много меньшую длины волны? Естественно, он может поглотиться веществом или быть запертым (образовать стоячую или почти стоячую волну) в фотонном кристалле. Сечение взаимодействия фотона с веществом, как мы упоминали, увеличивается при уменьшении длины волны с помощью фотонных кристаллов. Может также происходить многофотонное поглощение (многофотонные переходы). В вакууме может происходить **рождение пар безмассовых частиц** (частица-античастица), например, нейтрино-антинейтрино, которые по современным представлениям безмассовы (хотя сечение и вероятность такого процесса остаются малыми и при сильном «сжатии» фотона). В присутствии других частиц или полей, а также в веществе возможно рождение пар массивных частиц (для этого нужны фотоны рентгеновского диапазона или выше по энергии). Другой интересный эффект – **самофокусировка луча**, которая может происходить как в среде, так и в вакууме. С точки зрения квантовой электродинамики, диаграмма распространения фотона может включать в себя фермионные петли.