

# Лазеры на квантовых ямах и точках (решение) (физика)

1. Длина волны излучения лазера.

Энергия фотонов, излучаемых лазером (в главной спектральной линии), равна  $h\nu = E_g + E_e + E_h$ , где  $E_g$  – ширина запрещённой зоны в GaAs,  $E_e$  и  $E_h$  – энергии основных состояний электрона и дырки в потенциальной яме (взяты по модулю, отсчитываемые от границ запрещённой зоны), образуемой гетеропереходом, на котором основан данный лазер. Эта потенциальная яма, вообще говоря, имеет конечную глубину как для электрона, так и для дырки. Из условия задачи ясно, что глубина ямы по энергии по порядку величины равна  $V_0 \sim \frac{E_g(\text{AlAs}) - E_g(\text{GaAs})}{2} \sim 0,3$  эВ. Оценим, насколько глубока эта яма, и можно ли её

считать бесконечно глубокой. Критерием такой оценки является (как известно из квантовой механики) безразмерный параметр  $B = \frac{2mV_0d^2}{\hbar^2}$ , где  $m$  – эффективная масса,  $d$  – ширина ямы (ширина гетероперехода). Яма считается глубокой, если  $B \gg 1$ .

Расчёт показывает, что для электрона  $B \approx 50$ , а для дырки  $B \approx 340$ , то есть яму можно в обоих случаях считать бесконечно глубокой, что несколько облегчает нахождение уровней

энергии. Уровни энергии бесконечно глубокой ямы даются выражением  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} n^2$ , а энергии основного состояния соответствует  $n = 1$ . Значит, энергия фотона равна

$$h\nu = E_g + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_1 d^2} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_2 d^2}.$$

Учитывая связь длины волны с частотой  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , легко получить выражение для длины

волны:  $\lambda = \frac{hc}{E_g + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2d^2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}$ . Расчёт даёт значение  $\lambda \approx 760$  нм.

Вычислим также энергию фотона:  $E_\phi \approx 2,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

2. Оценка минимальной и максимальной интенсивности на выходе из лазера.

Введём следующие обозначения:  $N_g$  – концентрация электронов в «основном» состоянии (нижний уровень на рисунке 1),  $N_2$  – концентрация электронов в «возбуждённом» состоянии (верхний уровень на рисунке 1),  $n$  – концентрация фотонов в резонаторе (кристалле GaAs). Такие обозначения часто вводятся в физике лазеров при рассмотрении четырёхуровневой схемы накачки (см. рис. 2). «Быстрая релаксация» означает, что можно положить  $N_3 \approx 0$  и  $N_1 \approx 0$ . Наш лазер можно приближённо считать работающим по четырёхуровневой схеме. Действительно, накачка осуществляется за счёт напряжения на полупроводниковых слоях AlGaAs, между которыми находится двойной гетеропереход. Тогда  $N_g$  и  $N_3$  – это уровни энергии, соответствующие слоям, а  $N_1$  и  $N_2$  – уровни, соответствующие рисунку 1 (уровни в GaAs). Для сравнения на рис. 3 приведена схема уровней лазера, почти такого же, как в данной задаче (отличается порядком размеров рабочей области), взятая из книги Звелто «Принципы лазеров».

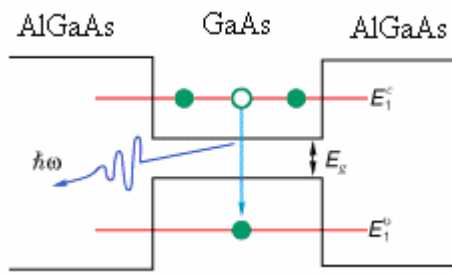


Рис. 1

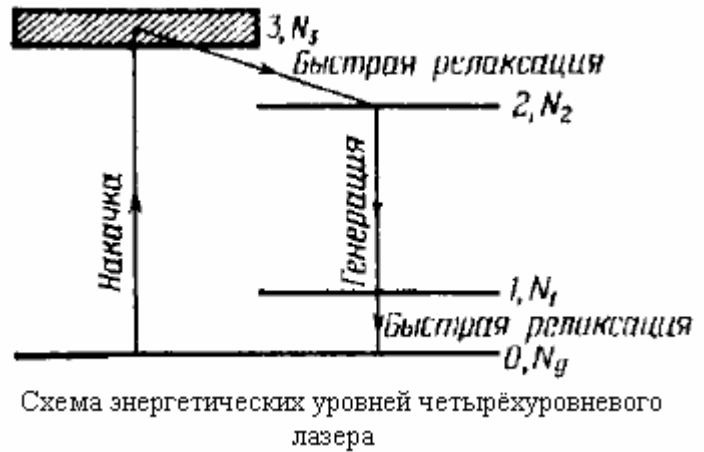


Рис. 2

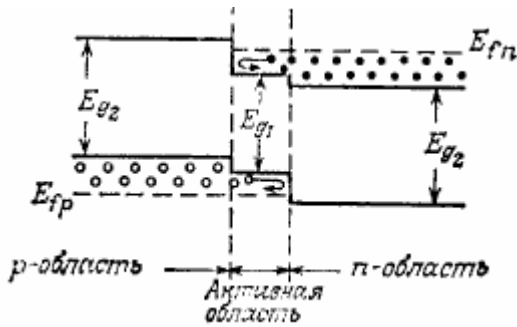


Рис. 3

Для четырёхуровневой схемы накачки запишем так называемые скоростные уравнения:

$$N_g + N_2 = N \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = WN_g - c\sigma_\phi nN_2 - \frac{N_2}{\tau} \quad (2)$$

$$\frac{dn}{dt} = c\sigma_\phi nN_2 - \frac{n}{\tau_c} \quad (3)$$

Смысл этих уравнений достаточно прост. Первое уравнение выражает полную концентрацию электронов  $N$  через  $N_g$  и  $N_2$ . Второе уравнение описывает баланс концентрации электронов в возбуждённом состоянии. Первый член в его правой части – это скорость накачки, второй – это скорость изменения концентрации за счёт вынужденных переходов (вынужденного излучения), а третий – за счёт спонтанных переходов. Здесь  $\tau$  – среднее время жизни электронов в состоянии  $N_2$ , а  $\sigma_\phi$  – сечение фотопоглощения (сечение перехода с нижнего уровня на верхний на рис. 1, равное сечению обратного перехода). Третье уравнение описывает баланс концентрации  $n$  фотонов в резонаторе. В нём  $\tau_c$  – время жизни фотона в резонаторе.

Для оценки пороговой интенсивности рассмотрим стационарный режим, т.е. положим

$$\frac{d}{dt} \equiv 0. \text{ Отметим также, что инверсия населённостей равна } \Delta N \approx N_2.$$

Из (3) следует, что генерация возможна лишь при некотором пороговом значении населённости  $N_2$

$$N_{2\text{порог}} = \frac{1}{c\sigma_\phi\tau_c} \quad (4)$$

которое в стационарном режиме не зависит от скорости накачки (при увеличении скорости накачки растёт концентрация фотонов, но не инверсия населённостей). Подставляя (4) в (2), можно найти пороговую скорость накачки, при которой начинается генерация:

$0 = WN_g - \frac{n}{\tau_c} - \frac{1}{c\sigma_\phi\tau_c\tau}$ , причём при малой (пороговой) скорости накачки вторым членом

справа можно пренебречь, и тогда имеем:

$$(WN_g)_{\text{порог}} = \frac{1}{c\sigma_\phi\tau_c\tau} \quad (5)$$

Зная пороговую скорость накачки, можно оценить интенсивность на выходе. Действительно, мощность накачки имеет тот же порядок, что и мощность излучения, поэтому  $WN_g \cdot E_\phi \cdot LS_0 = P$ , где  $E_\phi$  – энергия фотонов, которую мы оценили в предыдущем пункте,  $S_0$  – площадь поперечного сечения резонатора,  $P$  – мощность излучения. Значит, минимальная интенсивность равна

$$I_{\text{min}} = (WN_g)_{\text{порог}} \cdot E_\phi L = \frac{1}{c\sigma_\phi\tau_c\tau} E_\phi L \quad (6).$$

Время жизни возбуждённого состояния в низкоразмерной структуре можно оценить из соотношения неопределённостей Гейзенберга:

$$\tau \sim \frac{\hbar}{E_\phi} \quad (7)$$

Время жизни фотона в резонаторе выражается через параметры резонатора (показатель преломления для оценки положим равным единице):

$$\tau_c = \frac{2L}{c(1-R)} \quad (8)$$

Сечение фотопоглощения в линейной среде с двумя уровнями можно найти по формуле

$$\sigma_\phi = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\tau \cdot \Delta\nu} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{h}{\tau \cdot \Delta E} \approx \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{E_\phi}{\Delta E}, \text{ где } \Delta E \text{ – ширина спектральной линии по}$$

энергии. Эту ширину можно оценить как глубину потенциальной ямы:  $\Delta E \sim \frac{\pi^2 \hbar^2}{md^2}$ .

Расчёт показывает, что  $\frac{E_\phi}{\Delta E} \sim 15$ . Тогда имеем:

$$\frac{1}{\sigma_\phi} \approx \frac{2,6}{\lambda^2} \quad (9).$$

Подставляя (7), (8) и (9) в (6), имеем:  $I_{\text{min}} \approx \frac{E_\phi^2}{\hbar\lambda^2}$ .

Вычисления дают  $I_{\text{min}} \sim 10^9$  Вт/м<sup>2</sup>.

Теперь оценим максимально возможную интенсивность на выходе. Для этого учтём, что скорость накачки связана с плотностью тока накачки:

$WN_g = \frac{j}{ed}$  (10), где  $e$  – заряд электрона. Тогда можно записать выражение, аналогичное выражению (6):

$$I_{\text{max}} = \frac{j}{ed} E_\phi L \quad (11).$$

Оценим максимальную плотность тока накачки:

$$j \sim \frac{I}{\pi a^2} = \frac{dq}{dt} \sim \frac{e}{\pi a^2} \sim \frac{e}{1000\pi a_0^2}, \text{ где } a \text{ – характерный период решётки, } a_0 \text{ – борковский}$$

радиус, а  $\tau$  – время жизни возбуждённого состояния, оцененное по (7); примерно тот же масштаб времени даёт деление размера молекулы на скорость теплового движения при 300

К. Собирая всё вместе, получаем:  $I_{\max} \sim \frac{E_{\phi}^2 L}{1000 \hbar \pi \alpha_0^2 d}$ .

Вычисления дают  $I_{\max} \sim 10^{13}$  Вт/м<sup>2</sup>.

3. Длина волны, спектр и мощность квантовоточечного лазера.

Введём следующие обозначения:  $r$  – размер (диаметр) квантовой точки,  $d$  – диаметр диска. Условие образования стоячей волны (моды «шепчущей галереи») для классической волны имеет вид

$\pi d = n\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны,  $n$  – натуральное число (номер моды). Отсюда получаем спектр

возможных длин волн:  $\lambda = \frac{\pi d}{n}$ . Имеем длины волн в нанометрах:

5654; 2827; 1885; 1415; 1130; 942; 808; 707; ...

Однако если быть более точным, то нужно учитывать, что волна представляет собой набор квантовых осцилляторов, которые имеют нулевую моду колебаний, причём ей соответствует (с точки зрения энергетического спектра)  $n_0 = \frac{1}{2}$ . Поэтому формула для спектра длин волн с

квантовой поправкой будет иметь вид:  $\lambda = \frac{\pi d}{n + \frac{1}{2}}$ . Имеем длины волн в нанометрах:

3758; 2260; 1615; 1256; 1027; 869; 754; ...

Нужно определить номер моды  $n$  волны, которая распространяется в лазере (очевидно,  $n > 1$ , поскольку волна распространяется вдоль края диска). Уточним механизм генерации излучения. Если предположить, что длина волны определяется чисто электронными переходами в квантовых точках InAs (где эффективная масса электрона

$m_e = 0,024m_0$ ), то энергия фотонов равна  $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2}$ , и длина волны определяется

выражением  $\lambda = \frac{4\pi c m r^2}{\hbar}$ . Но расчёт показывает, что в этом случае  $\lambda > 100000$  нм, что не

попадает в нужный диапазон длин волн. Квантовые точки, о которых говорится в задаче, имеют большие размеры (~25 нм), поэтому расстояние между уровнями энергии в них мало.

Этим расстоянием (оно равно  $\frac{\hbar^2}{2m_e r^2}$ ) можно пренебречь по сравнению с шириной

запрещённой зоны в InAs и в GaAs. Значит, генерация излучения происходит за счёт гетероперехода между InAs и GaAs, подобно тому, как в предыдущей части задачи.

Валентные орбитали в InAs лежат выше по энергии, чем в GaAs. Поэтому электронная плотность частично смещается в сторону GaAs, и энергия фотонов определяется шириной запрещённой зоны в GaAs, т.к. они испущены при переходе электронов через эту запрещённую зону. Известно, что  $E_g(\text{GaAs}) = 1,5$  эВ (это дано в первой части задачи). Длина

волны определяется выражением  $\lambda \approx \frac{hc}{E_g}$ . Расчёт даёт значение  $\lambda \approx 830$  нм (для получения

более точного значения нужно рассматривать гетеропереход более подробно).

Это ближе всего к шестой моде стоячей волны ( $n = 6$ ). Следовательно,  $\lambda = 869$  нм.

Оценим ширину спектральной линии. Ширина в шкале длин волн связана с шириной

в шкале частот:  $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c}{\nu_2} - \frac{c}{\nu_1} \approx \frac{c(\nu_1 - \nu_2)}{\nu^2}$ , т.е.

$$\Delta\lambda = \frac{c\Delta\nu}{\nu^2} = \frac{ch\Delta E}{E^2} = \frac{\lambda^2 \Delta E}{hc} \quad (12).$$

Оценим  $\Delta E$  для разных механизмов уширения.

а.) Естественное уширение.  $\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar c}{\pi d} = 0,02 \cdot 10^{-19}$  Дж.

б.) Разность уровней энергии в квантовых точках.  $\Delta E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} = 0,004 \cdot 10^{-19}$  Дж.

в.) Тепловое уширение.  $\Delta E \sim kT = 0,007 \cdot 10^{-19}$  Дж при  $T = 50$  К и  $0,04 \cdot 10^{-19}$  Дж при  $T = 300$  К. Видим, что при 50 К уширение является естественным, а при 300 К – тепловым.

В первом случае  $\Delta\lambda \approx 10$  нм, а во втором  $\Delta\lambda \approx 20$  нм.

Поскольку размеры квантовых точек столь велики, что не определяют длину волны излучения, то эта длина волны почти не зависит от дисперсии размеров и от тепловых флуктуаций размеров (тепловые флуктуации размеров точек можно оценить

как  $\Delta r \sim \frac{ra_0 kT}{k_e e^2} \sim 1$  нм). От температуры зависит только ширина спектральной линии, и

характер этой зависимости найден выше:  $\Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{hc} \left( \frac{\hbar c}{\pi d} + kT \right)$ .

Мощность лазера определяется числом квантовых точек, участвующих в генерации волны. Оценим вероятность отдельно взятой точки А участвовать в генерации волны. Пусть некоторая точка В испустила фотон. В этот момент (точнее, малый промежуток времени) в генерации этой же волны могут участвовать только те точки, которые испускают фотон синфазно с точкой В. Эти точки находятся в малых сегментах рабочей поверхности, которые представляют собой участки длиной порядка  $\Delta\lambda$  около пучностей волны. Значит,

вероятность точки А «попасть в волну» точки В равна  $p = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ , а полная вероятность

испустить фотон вместе с какой-либо другой точкой равна  $P = Nw \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ , где N – число точек

на рабочей поверхности, w – вероятность одной точки испустить фотон (зависит от мощности накачки). Тогда вероятность того, что в генерации участвуют x точек, равна

$P_x = Nw \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^x$ , она быстро падает с x и пропорциональна числу квантовых точек на

рабочей поверхности (что достаточно очевидно); средняя мощность также

пропорциональна числу точек и равна  $M = Nw \langle xp^x \rangle$ .

4. Накачкой в данном лазере может служить **излучение с частотой, кратной частоте излучения лазера**, падающее на поверхность («колонну»), такое, чтобы сечение фотопоглощения для этой частоты было как можно большим. Для равномерного возбуждения точек будет лучше, если оно будет циркулярно поляризовано. Другой вариант – накачка **акустической волной**. Возможна также **электрическая накачка** (например, переменным потенциалом, подаваемым на «колонну»). В этом случае энергия будет поступать в квантовые точки подобно тому, как она поступает в светодиод индикаторной отвёртки (и других подобных приборов), приставленной к фазе электросети. Для этого точки должны иметь достаточную электроёмкость.

Выход лазерного импульса из резонатора обеспечивается такими длинами волн, которые **максимально поляризуют участок рабочей поверхности диска**. Для этого частота волны должна быть равна одной из собственных частот колебаний молекул GaAs в кристалле (условие резонанса).

## 5. Другие принципы работы лазеров на низкоразмерных структурах.

Можно выделить, по крайней мере, три направления будущего развития лазеров на квантовых точках. **Первый путь – создание лазера на основе одной квантовой точки, помещенной в микрорезонатор.** Здесь возможны два режима: лазерный, когда фотоны накапливаются в резонаторе, и режим фотонного турникета, когда фотоны по одному высвечиваются в течение каждого цикла накачки. Для периодической накачки используется поверхностная акустическая волна, а также резонансное туннелирование в режиме кулоновской блокады. На втором пути находится **создание лазеров с распределенной обратной связью, когда в микрорезонаторе формируется периодическая структура квантовых точек с периодом, равным длине волны лазерного излучения.** Предполагается, что это позволит значительно снизить пороговый ток и увеличить мощность. В качестве третьего пути можно выделить **лазер дальнего ИК диапазона, в котором осуществляются оптические переходы между подуровнями в одной зоне.** Весьма привлекательной выглядит также идея создания **каскадного лазера на квантовых точках.**

Одним из наиболее широко применяемых лазеров является инжекционный полупроводниковый лазер. Он применяется в лазерных принтерах, проигрывателях и дисководах для компакт-дисков. Полупроводниковые лазеры являются неотъемлемым элементом линий волоконной оптической связи. Такое широкое применение они нашли благодаря исключительно малым размерам и высокому КПД. Однако полупроводниковые лазеры генерируют сравнительно широкий спектр частот. Это обстоятельство ограничивает возможность их применений. Поэтому исследователи и инженеры разрабатывают методы сужения спектра генерации полупроводниковых лазеров с помощью внешних резонансных устройств. **Моды шепчущей галереи в кварцевых микрошарах, а также асферических частицах** являются одним из лучших кандидатов для решения проблемы частотной стабилизации полупроводникового лазера.