http://www.nanometer.ru/2009/03/01/12359338897639.html
Упругие свойства макромолекул

Использование макромолекул в нанотехнологиях разнообразно, желательно, чтобы участники отметили хотя бы следующие моменты:

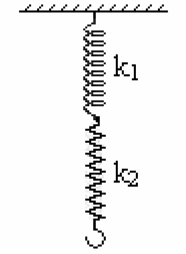
1. Создание композитов полимер – наночастицы с различными оптическими и механическими характеристиками,
2. Стабилизация наночастиц (например, в растворе) и их самосборка (как вариант – использование биомолекул ДНК)
3. Использование блоксополимеров для создания суспензий (в качестве поверхностно-активных веществ), мезопористых систем (в качестве «шаблонов»), создания «наношаблонов» при расслаивании систем, содержащих блоксополимеры
4. Применение полимеров для создания «микропечатей» в «мягкой литографии»
5. Использование специальных светочувствительных, электропроводящих и т.д. полимеров для создания микрокомпозитов и гибридных материалов

1. Рассмотрим сначала самое нижнее звено макромолекулы. Найдём величину его растяжения из закона Гука. F = kx, откуда $x = \frac{F}{k}$. Сила натяжения нижнего звена равна силе тяжести, действующей на нижний грузик массой m: F = mg. Получаем, что нижнее звено растянется на величину $x = \frac{mg}{k}$.
Второе снизу звено растянется на величину 2x (т.к. общая сила тяжести уже в 2 раза больше), третье – на 3x, четвёртое – на 4x, и так далее. Получается арифметическая прогрессия. Сумма n членов арифметической прогрессии равна $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$. В нашей прогрессии и первый член a_1, и разность d равны величине x. Поэтому общее изменение длины равно:

$$S_n = \frac{2x + x(n-1)}{2}n \approx \frac{xn^2}{2} = \frac{mgn^2}{2k} \approx 9\cdot 10^{-13} \text{ м.}$$

Первое приближённое равенство выполняется потому, что n много больше единицы.
Такое растяжение трудно зафиксировать экспериментально, и более того, оно сравнимо с растяжениями от других факторов (например, теплового движения атомов макромолекулы). Поэтому данный метод измерения неприменим.

2. Обозначим коэффициент жёсткости одного звена за k_0. Чему равен общий коэффициент жёсткости молекулы из n звеньев? Решим вспомогательную задачу. Две пружины с коэффициентами жёсткости k_1 и k_2 соединены так, как показано на рисунке. Чему равен общий коэффициент жёсткости получившейся конструкции?



Представим, что конструкцию растянули некоторой силой F. Так как нижняя пружина находится в равновесии, то на неё со стороны верхней пружины действует сила, тоже равная F (массу пружин не учитываем, как и в предыдущих задачах). Значит, обе пружины растянуты с силой, равной F. Удлинение системы равно сумме удлинений каждой из пружин: $x = x_1 + x_2$. Пусть k – коэффициент жёсткости системы. По закону Гука, $F = kx = k(x_1 + x_2)$. Теперь x_1 и x_2 нужно выразить через F, k_1 и k_2: $x_1 = \frac{F}{k_1}$, $x_2 = \frac{F}{k_2}$. Эти выражения подставим в предыдущую формулу, F сократится, и можно будет выразить из получившегося равенства k. Получается следующее:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Этот результат можно сообщить и на случай, когда соединены не две, а n пружин:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n}.$$

В нашем случае коэффициенты жёсткости всех «пружин» (звеньев молекулы) одинаковы и равны k_0, и всего их n штук. Поэтому имеем:

$$\frac{1}{k} = \frac{n}{k_0}, \text{ или } k_0 = nk.$$

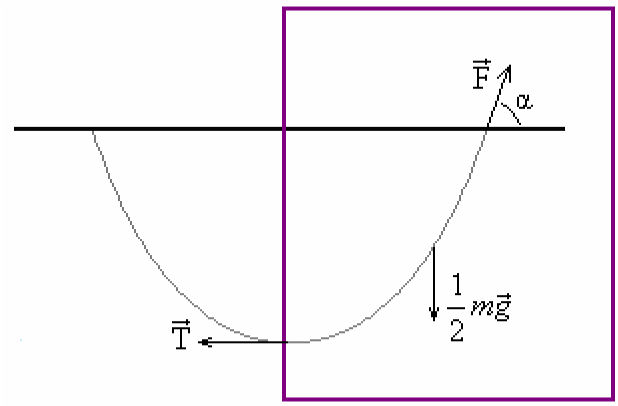
Мы выразили коэффициент жёсткости одного звена через коэффициент жёсткости всей молекулы, который теперь надо найти.

Максимум амплитуды колебаний молекулы свидетельствует о резонансе: период собственных колебаний молекулы равен периоду звуковой волны. Период собственных колебаний пружинного маятника равен $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}}$. Период звуковой волны равен $\mathrm{T} = \frac{\lambda}{\upsilon}$, где υ – скорость звука в воздухе. Приравнивая эти величины и выражая k, имеем: $\mathrm{k} = \frac{4\pi^2 \mathrm{m}\upsilon^2}{\lambda^2}$.

Тогда коэффициент жёсткости одного звена равен

$$\mathrm{k}_0 = \frac{4\pi^2 \mathrm{m}\upsilon^2 \mathrm{n}}{\lambda^2} \approx 0{,}0046 \text{ Н/м}.$$

3. Нужно рассмотреть половину цепочки (левую или правую) и записать условие равновесия. Рассмотрим правую половинку. Векторная сумма всех действующих на неё сил (это три силы, изображённые на рисунке) равна нулю: $\vec{\mathrm{T}} + \vec{\mathrm{F}} + \frac{1}{2}\mathrm{m}\vec{\mathrm{g}} = 0$.



Спроецируем это векторное равенство на горизонтальную ось: $\mathrm{T} = \mathrm{F}\cos\alpha$,

и на вертикальную ось: $\frac{1}{2}\mathrm{mg} = \mathrm{F}\sin\alpha$. Деля одно уравнение на другое и выражая T, получим ответ: $\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{mg}\,\mathrm{ctg}\alpha = 2{,}88 \cdot 10^{-18}$ Н.

4. Каждый грузик в дискретной модели приходится на длину L в непрерывной модели. По определению плотности, имеем:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{\pi d^2}{4} L} = \frac{4m}{\pi d^2 L}.$$

Коэффициент жёсткости цилиндрического тела с площадью основания S и высотой L связан с модулем упругости материала, из которого оно сделано, следующим образом (это следует из определения модуля упругости):

$k = \frac{ES}{L}$. Отсюда выражаем $E = \frac{kL}{S} = \frac{4kL}{\pi d^2}$.

5. Чтобы решить последнюю часть задачи, проще всего сделать обратный переход: от непрерывной модели к дискретной. Однако этот переход нельзя сделать однозначно. Например, покопавшись с формулами, вы могли убедиться, что нельзя однозначно определить длину дискретного звена L из параметров непрерывной модели. Как же заменить непрерывную модель дискретной? При этой замене *длину структурного звена нужно устремить к нулю* (или, что эквивалентно, *число структурных звеньев устремить к бесконечности*).

Введём сначала модель, в которой длина структурного звена равна L (а число звеньев равно $n = \frac{L_0}{L}$), а потом устремим L к нулю.

Подобно первой части этой задачи, рассмотрим сначала нижнее звено. Его удлинение равно $x_0 = \frac{mg}{k}$. Удлинение каждого звена на $d = \frac{mg}{k}$ больше, чем удлинение предыдущего. Имеем арифметическую прогрессию. Сумма n членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{2x_0 + d(n-1)}{2} n \approx \frac{dn^2}{2} = \frac{d}{2}\frac{L_0^2}{L^2} = \frac{mg}{2k}\frac{L_0^2}{L^2} = \frac{\rho LSg}{2\frac{ES}{L}}\frac{L_0^2}{L^2} = \frac{\rho L^2 Sg}{2ES}\frac{L_0^2}{L^2} = \frac{\rho g}{2E} L_0^2.$$

Видим, что L и S сократились. Поэтому сумма членов арифметической прогрессии при стремлении L к нулю не меняется. Она вообще не зависит от L, хотя число n членов прогрессии и сами эти члены от L зависят. Таким образом, полученная формула является окончательной, и остаётся подставить числа и посчитать.

Вычисления дают: 12,5 см.