Решение задачи 1А.

Пусть:
d – диаметр одной квантовой точки,
V – объем одной квантовой точки,
m – масса одной квантовой точки,
ρ – плотность материала,
N – население Земли,
M – масса кучи, состоящей из квантовых точек около штаб-квартиры Государственной Корпорации «Роснанотех».

По условию задачи:
$d = 10$ нм $= 10^{-8}$ м,
$\rho = 7$ г/см$^3 = 7 \cdot 10^6$ г/м^3.

Примем, что население Земли в настоящее время составляет 6 миллиардов человек, т.е.:
$N = 6 \cdot 10^9$.

Масса кучи, состоящей из квантовых точек около штаб-квартиры Государственной Корпорации «Роснанотех»:
$M = N \times m = N \times \rho \times V$

Пусть квантовая точка имеет форму шара, тогда ее объем составляет:
$V = (4\pi R^3)/3 = (\pi d^3)/6$

Тогда:
$M = N \times \rho \times (\pi d^3)/6 = (6 \cdot 10^9 \times 7 \cdot 10^6$ г/м$^3 \times 3.14 \times (10^{-8})^3$ м$^3)/6 \approx 2.2 \cdot 10^{-8}$ г

Ответ: куча, состоящая из квантовых точек около штаб-квартиры Государственной Корпорации «Роснанотех», будет весить около $2.2 \cdot 10^{-8}$ г.

Комментарий: основные ошибки в этой задаче, как ни странно, арифметические, связанные с неправильным вычислением или переводом между единицами измерения (граммами и килограммами, метрами, сантиметрами и нанометрами).

Решение задачи 1Б.

Пусть:
d – диаметр нанотрубки,
D – диаметр флейты,
L – длина окружности талии девушки,
l – длина исходной нанотрубки,
$l_{ув}$ – длина увеличенной нанотрубки,
N – число витков увеличенной нанотрубки вокруг талии девушки.

По условию задачи:
$L = 60$ см $= 0.6$ м,
$l/d = 100 \Rightarrow l = 100d$

Т.к. длина увеличенной нанотрубки равна длине исходной нанотрубки, увеличенной во столько же раз, во сколько диаметр нанотрубки увеличен до диаметра флейты, т.е.:
$l_{ув} = (D/d) \times l = (D/d) \times 100d = 100D$

Из рисунка можно оценить, что диаметр флейты составляет: $D \sim 2$ см = 0.02 м, тогда:
$l_{ув} = 100 \times D = 100 \times 0.02$ м = 2 м.

Тогда увеличенную нанотрубку можно обернуть вокруг талии девушки:
$N = l_{ув}/L = 2$ м / 0.6 м ≈ 3

<u>Ответ:</u> вокруг талии девушки увеличенную нанотрубку можно обернуть около 3 раз.

<u>Решение задачи 1В.</u>

Для решения данной задачи нужно было оценить размер наноробота, радиус острия швейной иглы и радиус иглы атомно-силового микроскопа.

Пусть наноробот при посадке на поверхность занимает площадь в форме круга с радиусом 100 нм, а острие швейной иглы и иглы атомно-силового микроскопа представляет собой также плоскую окружность. Кроме того, допустим, что нанороботы при посадке на острие игл «утрамбовываются» и занимают всю предоставленную им площадь.

Пусть
$r_{нр}$ – радиус площадки, занимаемой нанороботом,
$R_{ши}$ – радиус площадки на острие швейной иглы,
$R_{АСМ}$ – радиус площадки на острие атомно-силового микроскопа,
$N_{ши}$ – число нанороботов, которые разместятся на острие швейной иглы,
$N_{АСМ}$ – число нанороботов, которые разместятся на острие иглы атомно-силового микроскопа.

Примем, что:
$r_{нр} = 100$ нм $= 10^{-7}$ м,
$R_{ши} = 0.1$ мм $= 10^{-4}$ м,
$R_{АСМ} = 1$ нм $= 10^{-9}$ м.

Площадь, занимаемая одним нанороботом:
$S_{нр} = \pi r_{нр}^2 = (10^{-7})^2\pi = 10^{-14}\pi$ м^2.

Площадь площадки на острие швейной иглы:
$S_{ши} = \pi R_{ши}^2 = (10^{-4})^2\pi = 10^{-8}\pi$ м^2.

Площадь площадки на острие атомно-силового микроскопа:
$S_{АСМ} = \pi R_{АСМ}^2 = (10^{-9})^2\pi = 10^{-18}\pi$ м^2.

Тогда число нанороботов, которые разместятся на острие швейной иглы, составляет:
$N_{ши} = S_{ши}/ S_{нр} = 10^{-8}\pi$ м^2 / $10^{-14}\pi$ м$^2 = 10^6$,

а на острие атомно-силового микроскопа:
$N_{АСМ} = S_{АСМ} / S_{нр} = 10^{-18}\pi$ м^2 / $10^{-14}\pi$ м$^2 = 10^{-4}$, т.е. ни одного.

<u>Ответ:</u> на острие швейной иглы разместится около миллиона нанороботов, а на острие иглы атомно-силового микроскопа – ни одного наноробота.

<u>Комментарий:</u> варианты ответа типа «ну, одного наноробота мы всяко наколем на иглу атомно-силового микроскопа» или «один наноробот все-таки сможет балансировать на одной ножке на острие иглы атомно-силового микроскопа» тоже принимались за правильные!

<u>Решение задачи 1Г.</u>

Молекула фуллерена в некотором приближении является шаром. Также шаром, по условию задачи, является фагоцит. Кроме того, в предисловии к задаче было сказано, что размер молекулы фуллерена составляет 0.75 нм. Представим, что при попадании в желудок прожорливого фагоцита молекулы фуллерена «утрамбовываются» таким образом, что они занимают весь объем желудка.

Пусть:
$D_{фул}$ – диаметр молекулы фуллерена, т.е. $D_{фул} = 0.75$ нм ≈ 1 нм $= 10^{-9}$ м,
$D_{фаг}$ – диаметр прожорливого фагоцита,
$V_{фул}$ – объем, занимаемый одной молекулой фуллерена,
$V_{фаг}$ – объем желудка прожорливого фагоцита,
N – число молекул фуллерена в фагоците.

Оценим диаметр прожорливого фагоцита:
$D_{фаг,\ MIN} = 0.5$ мкм $\le D_{фаг} \le 10$ мкм $= D_{фаг,\ MAX}$, т.е.
$0.5\cdot10^{-6}$ м $\le D_{фаг} \le 10^{-5}$ м.

Объем, который занимает молекула фуллерена, составляет:
$V_{фул} = (4\pi R_{фул}^3)/3 = (\pi D_{фул}^3)/6$

Минимальный объем прожорливого факоцита:
$V_{фаг,\ MIN} = (4\pi R_{фаг,\ MIN}^3)/3 = (\pi D_{фаг,\ MIN}^3)/6$

Максимальный объем прожорливого фагоцита:
$V_{фаг,\ MAX} = (4\pi R_{фаг,\ MAX}^3)/3 = (\pi D_{фаг,\ MAX}^3)/6$

Тогда минимальное число молекул фуллерена, которые проглотит прожорливый фагоцит, составляет:
$N_{фул,\ MIN} = V_{фаг,\ MIN} / V_{фул} = ((\pi D_{фаг,\ MIN}^3)/6) / ((\pi D_{фул}^3)/6) = D_{фаг,\ MIN}^3 / D_{фул}^3 = (0.5\cdot10^{-6}\ м)^3 / (10^{-9}\ м)^3 = 0.125\cdot10^{-18}/10^{-27} \approx 10^{-21}/10^{-27} = 10^6$, т.е. миллион.

$N_{фул,\ MAX} = V_{фаг,\ MAX} / V_{фул} = D_{фаг,\ MAX}^3 / D_{фул}^3 = (10^{-5})^3\ м^3 / (10^{-9})^3\ м^3 = 10^{-15} / 10^{-27} = 10^{12}$, т.е. триллион.

<u>Ответ:</u> в зависимости от размера фагоцита, он может проглотить от миллиона до триллиона молекул фуллерена.

<u>Решение задачи 1Д.</u>

Автор эмблемы расположил гнома между молекулой фуллерена и Луной, потому что отношение размера гнома к размеру молекулы фуллерена равно отношению размера Луны к размеру гнома, о чем говорит шкала, также показанная на эмблеме.

<u>Решение задачи 1Е.</u>

Пусть:
x – сторона сечения графитового стержня,

S – площадь сечения графитового стержня,
L – длина графитового стержня,
c – расстояние между слоями графена в чистом графите,
N – число слоев графена в стержне,
a_{A4} – ширина листа формата А4,
b_{A4} – длина листа формата А4,
S_{A4} – площадь листа формата А4,
$S_{закр}$ – площадь, которую можно закрасить, израсходовав весь графитовый стержень,
N_{A4} – число листов формата А4, которые можно закрасить.

По условию задачи известно, что:
$x = 1$ мм $= 10^{-3}$ м,
$L = 5$ см $= 5{\cdot}10^{-2}$ м.

Из рисунка оценим, что расстояние между слоями графена в чистом графите:
$c \approx 3$Å $= 3{\cdot}10^{-10}$ м.

Пренебрежем размером атомов углерода и будем считать, что вся длина графитового стержня состоит из суммы межплоскостных расстояний.

Число слоев графена в графитовом стержне равно длине стержня, деленному на расстояние между слоями графена, т.е.:
$N = L/c = 5{\cdot}10^{-2}$ м / $3{\cdot}10^{-10}$ м $\approx 10^8$.

Площадь, которую можно закрасить, израсходовав весь стержень, равна площади сечения графитового стержня, умноженную на число слоев графена в стержне, т.к. при закрашивании квадратика, площадь которого равна площади сечения графитового стержня, происходит отслаивание одного монослоя, составляющего графитовый стержень.
$S_{закр} = S \times N$,

где
$S = x^2$ – площадь сечения графитового стержня, являющегося квадратом.

Следовательно,
$S_{закр} = x^2N = (10^{-3}$ м$)^2 \times 10^8 = 10^2$ м^2.

Размеры листа формата А4 составляют:
$a_{A4} = 21$ см $= 21{\cdot}10^{-2}$ м $\approx 20{\cdot}10^{-2}$ м,
$b_{A4} = 29.7$ см $= 29.7{\cdot}10^{-2}$ м $\approx 30{\cdot}10^{-2}$ м.

Тогда, площадь листа формата А4:
$S_{A4} = a_{A4} \times b_{A4} = 20{\cdot}10^{-2}$ м $\times\ 30{\cdot}10^{-2}$ м $= 600{\cdot}10^{-4}$ м$^2 = 6{\cdot}10^{-2}$ м^2.

Количество листов формата А4, которые можно закрасить описанным в задаче стержнем, составляет:
$N_{A4} = S_{закр} / S_{A4} = 10^2$ м^2 / $6{\cdot}10^{-2}$ м$^2 \approx 1600$ листов.

Ответ: можно закрасить около 1600 листов формата А4.

Комментарий: у разных авторов задачи количество листов формата А4 получалось разным, т.к. авторы по-разному проводили оценку межплоскостного расстояния между слоями графена. Кроме того, некоторые авторы не пренебрегали размером слоя атомов графита, - такое решение также засчитывалось за правильное.

Решение задачи 1Ж.

Пусть:
V – объем мыльного раствора,
$l_{ПАВ}$ – длина молекулы поверхностно-активного вещества (ПАВ),
$a_{ст}$ – толщина стенки мыльного пузыря,
$V_{ст}$ – объем стенки мыльного пузыря,
$S_{ст}$ – площадь поверхности мыльного пузыря,
R – радиус мыльного пузыря, при котором толщина его стенки равна длине молекулы ПАВ.

По условию задачи:
$V = 0.01$ мл $= 10^{-5}$ л $= 10^{-5}$ дм$^3 = 10^{-8}$ м^3.

Согласно оценочным данным длинна молекулы ПАВ составляет:
$l_{ПАВ} \approx 10$ Å $= 10^{-9}$ м,
и этому значению равна толщина стенки образующегося мыльного пузыря:
$a_{ст} = 10^{-9}$ м.

Объем стенки образующего мыльного пузыря, с одной стороны, равен произведению площади поверхности мыльного пузыря на толщину его стенки, а с другой стороны, он равен объему исходной капли мыльного раствора, т.е.:

$$V_{ст} = S_{ст} \times a_{ст} = 4\pi R^2 \times a_{ст} = V$$

Из полученного уравнения находим, что:
$R^2 = V/(4\pi\ a_{ст}) = 10^{-8}$ м^3 / $(4 \times 3.14 \times 10^{-9}$ м$) \approx 0.796$ м^2,

тогда
$R \approx 0.892$ м ≈ 0.9 м,

а диаметр мыльного пузыря в два раза больше, чем радиус, т.е. 1.8 м.

Ответ: толщина стенки мыльного пузыря станет равной длине молекулы поверхностно-активного вещества при диаметре пузыря равном около 1.8 метров.

Комментарий: эта задача оказалась наиболее сложной из разминки. Многие участники Олимпиады даже не брались за ее решение. Мы также засчитывали за верные решения, авторы которых называли условие задачи некорректным, т.к. толщина стенки мыльного пузыря не может быть равна длине одной молекулы ПАВ в связи с тем, что структура стенки мыльного пузыря представляет собой, как минимум, две молекулы ПАВ, между которыми находится молекула воды.

Решение задачи 1З.

Пусть:
D – диаметр окружности клетки,
R – радиус окружности клетки,
L1 – расстояние, которое проползет первый вирус,

$L2$ – расстояние, которое проползет второй вирус,
$t1$- время, которое затратит на путь первый вирус,
$t2$ – время, которое затратит на путь второй вирус,
$v1$ – скорость первого вируса,
$v2$ – скорость второго вируса.

По условию задачи
$D = 10$ мкм $= 10^{-5}$ м

Пусть вирус 1 ползет из точки А в точку Б по окружности. Тогда весь его путь составит половину длины окружности клетки, т.е.
$L1 = (2\pi R)/2 = \pi R$

Пусть второй вирус ползет из точки А в точку Б насквозь, по диаметру. Тогда весь его путь равен диаметру клетки, т.е.
$L2 = D = 2R$

По условию задачи вирусы должны встретиться в точке Б одновременно, т.е в пути они проведут одинаковое время, т.е.
$t1 = t2$,

следовательно, т.к. время, затраченное на путь, равно отношению расстояния к скорости:
$L1/v1 = L2/v2$,

следовательно,
$v1/v2 = L1/L2 = \pi R/2R = \pi/2 \approx 1.57$

Для того, чтобы решить вторую часть задачи, в которой спрашивается, каково соотношение объемов вируса и клетки, нужно было найти средние размеры вирусов и клеток. Допустим, что и вирусы, и клетки имеют форму шара.

Пусть:
$V_{кл}$ – объем клетки,
$R_{кл}$ – радиус клетки,
$V_{вир}$ – объем вируса,
$R_{вир}$ – радиус вируса.

Объем клетки составляет:
$V_{кл} = (4\pi R_{кл}^3)/3$

Объем вируса составляет:
$V_{вир} = (4\pi R_{вир}^3)/3$

Тогда соотношение объемов вируса и клетки:
$V_{кл}/V_{вир} = ((4\pi R_{кл}^3)/3)/((4\pi R_{вир}^3)/3) = R_{кл}^3/R_{вир}^3$

Согласно оценочным данным, радиус клеток в среднем можно принять за:
$R_{кл} \approx 10$ мкм $= 10^{-6}$ м,
а радиус вируса:
$R_{вир} \approx 10$ нм $= 10^{-8}$ м

Тогда:

$V_{кл}/V_{вир} = R_{кл}^3/R_{вир}^3 = (10^{-6})^3/(10^{-8})^3 = 10^{-18}/10^{-24} = 10^6$

Ответ: (1) соотношение скоростей движения вирусов v1/v2 должно быть равно около 1.57, (2) соотношение объемов вируса и клетки около 10^6.

Решение задачи 1И.

Предисловие: задача была самой сложной по своей сути, поскольку проверяла знания по теме «геометрическая прогрессия» и «логарифмы».

Пусть:
Масса наноробота m = 0.01 мг = 10^{-5} г.
Длина нанотрубки l = 1 мкм (микрон) = 10^{-6} м.
Диаметр нанотрубки d = 10 нм = 10^{-8} м.
Конечная длина троса L = 1000 км = 10^6 м.
Время «сварки» соединения / стыка нанотрубок t = 1 мс (миллисекунда) = 10^{-3} с.

Согласно условию, **длина** троса растет в прогрессии 2^N, где N – число шагов, поэтому $L = 2^N l$ или $N = lg(L/l)/lg(2) = lg(10^6/10^{-6})/lg(2) = 12*lg(10)/lg2 \sim$ **40**. Представляете, всего за каких-то 40 шагов будет сделан трос длиной 1000 км!

Количество нанотрубок, формирующих поперечное сечение троса (почему так сложно сказано – смотри дальше!), также растет в прогрессии 2^N, но в этом случае площадь сечения будет равна количеству нанотрубок **в сечении** (не вообще, а именно в сечении), умноженному на их диаметр, то есть $2^N*pi*d^2/4$. Это оценочная величина, верная только в том случае, если в пучке нанотрубок, формирующем трос, нет свободного пространства между трубками (это неверно, но, скажем, пусть трубки «умялись» и приняли шестигранное сечение, равное по площади исходному, тогда сечение будет «сплошным»). Далее, если мы примем, что трос имеет круглое сечение (можно было считать его и квадратным, в принципе), то есть если мы свернем получающуюся при сварке конструкцию в рулон, то легко посчитать диаметр троса: $D = ((4/pi) * 2^N*pi*d^2/4)^{0.5} = 2^{20} * 10^{-8}$ м = 1 сантиметр. Вот такой тонкий и симпатичный трос длиной 1000 км!

Сколько же при этом померло нанороботов? А вот здесь прогрессия и в длину, и в ширину, то есть роботов сдохнет 4^{40} или $\mathbf{1.2*10^{24}}$ **штук**. В терминах химии это всего-то два моля (2 N_A, где N_A – число Авогадро). Их масса составит $1.2*10^{24} * 10^{-5}$ г или около **10 триллионов тонн.** Это масса небольшого астероида типа того, который вызвал всепланетную катастрофу и уничтожил в далекие времена динозавров при столкновении с Землей.

Оценка времени изготовления троса подразумевает «взрывной», «бесконечный» и «вахтовый» варианты. В первом из них вся масса роботов кидается вместе делать абсолютно все стыки троса. Теоретически тогда они могут сделать это за 1 мс. Однако если посчитать, сколько энергии выделится за это короткое время, то нет сомнений, что это будет новый Большой Взрыв, который разрушит и трубку, а также похоронит сразу всех нанороботов (куда они денутся из внутренностей троса). При «вахтовом» методе все будет сделано за 40 шагов, то есть за 40 мс, что не сильно по энерговыделению, особенно на последних стадиях, будет отличаться от «взрывного» варианта. При «бесконечном» варианте время равно числу нанороботов, умноженному на длительность работы каждого из них, то есть $1.2*10^{24}*10^{-3}$с, что составит примерно $0.4*10^{14}$ лет, то есть **40 триллионов** лет – никто не дождется конца этого долгостроя!