РЕШЕНИЕ

1. Уравнение движения

Задача о движении частицы в оптической ловушке эквивалентна задаче о движении броуновской частицы. Из-за температурных флуктуаций в жидкости, в которую помешена частица, частица совершает случайные колебания. Уравнение движения захваченной частицы (в проекции на ось x) имеет вид: **(1)**

$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - k_{eff}x + F_T$ *(1)*

Здесь должны быть сделаны следующие допущения:

- Сила вязкого трения, действующая на частицу равна $F = -\gamma\dot{x} = -6\pi R\eta\dot{x}$, где R – радиус частицы, η – динамическая вязкость (формула Стокса)
- Всю массу считаем сосредоточенной в частице, массой макромолекулы пренебрегаем
- Колебания частицы малы и считаются линейными (при смешении частицы из положения равновесия на нее действует возвращающая сила, пропорциональная смещению с эффективным коэффициентом жесткости k_{eff})
- Эффективный коэффициент жесткости k_{eff} считаем слагающимся из двух частей: из коэффициента жесткости оптической ловушки и коэффициента жесткости макромолекулы: $F_{упр}(x) = -k_{опт}x - k_{мол}x = -k_{eff}x$

Аналогичное уравнение можно записать и в проекции на ось y:

$m\ddot{y} = -\gamma\dot{y} - k_{опт}y + F_T$ *(2)*

с той лишь разницей, что в этом случае вместо эффективного коэффициента жесткости стоит коэффициент жесткости оптической ловушки (в поперечном направлении считаем, что макромолекула не вносит изменения в колебания частицы).

2. Оценка членов в уравнении движения

Сравним вклад различных слагаемых в уравнениях движения (1-2). Движение частицы можно представить как набор гармоник, тогда уравнения движения перепишутся в виде:

$$mX_0\omega^2 - \gamma X_0\omega - k_{eff}X_0 + F_T = 0$$

$$mY_0\omega^2 - \gamma Y_0\omega - k_{opt}Y_0 + F_T = 0$$

где X_0, Y_0 – амплитуды соответствующих Фурье-гармоник колебаний частицы в ловушке. Сравним модули первых двух слагаемых и определим частоту на которой они сравниваются.

Оценим массу и коэффициент сопротивления для суспензии частиц радиусом 1 мкм и плотностью 5 г/см3 (SiO2): $m=4/3\rho\pi R^3 \simeq 4{,}2 \cdot 10^{-15}$ кг, $\gamma = 6\pi R\eta \simeq 1{,}9 \cdot 10^{-8}$ кг/с. Вклад от первых двух слагаемых сравняется при характерный частотах порядка $\omega \simeq \gamma/m \simeq 10^7$Гц, что значительно превышает частоты, наблюдаемые в эксперименте. (По условию, частота дискретизации АЦП равна 10кГц, и более высокие частоты не наблюдаются.) На наблюдаемых частотах вклад первого слагаемого на три порядка меньше второго. Таким образом, первым слагаемым можно пренебречь и считать осциллятор сильно затухающим. Уравнения движения примут вид:

$$\dot{x} - \omega_X x = F_T/\gamma$$

$$\dot{y} - \omega_Y y = F_T/\gamma$$

Где характерные частоты равны:

$$\omega_X = \frac{k_{eff}}{6\pi R\eta}$$

$$\omega_Y = \frac{k_{opt}}{6\pi R\eta}$$

3. Выражение для случайной силы (броуновское движение)

Выражение для броуновской силы (может быть найдено в учебнике по статистической физике или найдено самостоятельно):

$$F(t) = \sqrt{2D}n(t), \quad < n(t)n(t+\tau) >= \delta(\tau), \quad \mathrm{D} = \frac{k_B T}{\gamma}$$

(Считаем случайный процесс дельта-коррелированным.)

4. Получение выражения для спектра мощности колебаний частицы

Подставив выражение для броуновской силы в исходное уравнение движения, и, рассматривая фурье-образ автокорреляционной функции (т.е. спектр мощности) колебания частицы в ловушке, получаем выражение для спектра мощности:

$$P_X(\omega) = \frac{2D}{\omega^2 + \omega_X^2}$$

$$P_Y(\omega) = \frac{2D}{\omega^2 + \omega_Y^2}$$

5. Получение выражения для автокорреляционной функции

Автокорреляционная функция и спектр мощности связаны преобразованием Фурье. Проводя обратное Фурье преобразование спектра мощности, получаем для автокорреляционной функции:

$$B_X(\tau) \sim \exp(-\omega_X |\tau|)$$

$$B_Y(\tau) \sim \exp(-\omega_Y |\tau|)$$

6. Определение «характерной частоты» по графикам

Из графиков «характерные частоты» для колебаний по осям x и y равна соответственно:

$$\omega_X = 150\,Гц$$

$$\omega_Y = 100\,Гц$$

7. Оценка коэффициентов жесткости, определение коэффициента жесткости ловушки и макромолекулы

Коэффициент жесткости ловушки равен:

$$k_{opt} = \omega_Y 6\pi R\eta = 1{,}9\cdot 10^{-6}\,\text{Н/м} = 1{,}9\,\text{пН/мкм}$$

$$k_{eff} = \omega_X 6\pi R\eta = 2{,}8\cdot 10^{-6}\,\text{Н/м} = 2{,}8\,\text{пН/мкм}$$

$$k_{mol} = k_{eff} - k_{opt} = 6\pi R\eta(\omega_X - \omega_Y) = 0{,}9\cdot 10^{-6}\,\text{Н/м} = 0{,}9\,\text{пН/мкм}$$

8. Оценка максимального смешения

При хорошей фокусировке размер области фокусировки (и, соответственно, размер оптической ловушки) сравним с длиной волны. Считая в пределах ловушки ее потенциал равным потенциалу гармонического осциллятора, а вне ловушки – равным нулю, максимальную силу можно оценить следующим образом: $F_{\max} = k_{opt}\lambda = 2\,\text{пН}$.

Максимальное смещение соответственно равно: $L_{\max} = F_{\max} / k_{mol} = 2{,}2\text{мкм}$

Ответы:

Коэффициент жесткости ловушки и молекулы соответственно равны:
$k_{opt} = \omega_Y 6\pi R\eta = 1{,}9 \cdot 10^{-6}\,\text{Н/м} = 1{,}9\,\text{пН/мкм}$

$k_{mol} = k_{eff} - k_{opt} = 6\pi R\eta(\omega_X - \omega_Y) = 0{,}9 \cdot 10^{-6}\,\text{Н/м} = 0{,}9\,\text{пН/мкм}$

Максимальное смещение равно: $L_{\max} = F_{\max} / k_{mol} = 2{,}2\text{мкм}$